# 2017학년도 대수능 화학I 20번 문항에 대한 수학적 고찰

**20.** 다음은 A와 B가 반응하여 C를 생성하는 화학 반응식이다.

$a\mathrm{A} + \mathrm{B} \rightarrow 2\mathrm{C}$ ($a$는 반응 계수)

표는 $m$몰의 A가 들어 있는 용기에 B를 넣어 반응을 완결시켰을 때, 반응 후 남아 있는 반응물에 대한 생성물의 몰수 비($\frac{n_{생성물}}{n_{반응물}}$)를 넣어준 B의 몰수에 따라 나타낸 것이다.

| B의 몰수 | 2 | 3 | $\frac{9}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{n_{생성물}}{n_{반응물}}$ | 4 | 6 | $x$ |

$m \times x$는? [3점]

① 18 ② 20 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

aA+bB→cC일 때, A가 m몰 있는 실린더에 넣어준 B의 몰수를 x라 하고, 반응이 완결된 후 남아 있는 반응물의 몰수에 대한 생성물의 몰수를 ⓧ라 합시다.

수능 20번에서 제가 희한하다고 느낀 것은 표 속의 두 실험 결과 값에 대하여 ⓧ가 x에 비례한다는 사실입니다. 뭔가 일반화할 수 있지 않을까 싶었습니다.

첫째, 남아 있는 반응물이 A일 때(B가 다 반응하였을 때) -----------㉠
둘째, 남아 있는 반응물이 B일 때(A가 다 반응하였을 때) -----------㉡

㉠ ---> ⓧ$=\dfrac{cx}{m-\dfrac{a}{b}x}=\dfrac{bcx}{bm-ax}$ $(x<\dfrac{b}{a}m)$ 라는 식이 나오고,

㉡ ---> ⓧ$=\dfrac{c\times\dfrac{b}{a}m}{x-\dfrac{b}{a}m}=\dfrac{bcm}{ax-bm}$ $(x>\dfrac{b}{a}m)$ 라는 식이 나옵니다.

㉠과 ㉡은 불연속 함수이므로 일반화하기가 어려워 보입니다. 식을 좀 더 면밀히 분석해보기 위해 각 식에 역수를 취하겠습니다. 즉, ⓧ의 역수, 다시 말해 생성물의 몰수에 대한 남아 있는 반응물의 몰수를 ⓨ라 정의할 겁니다. ㉠의 역수를 ㉢, ㉡의 역수를 ㉣이라 하겠습니다.

㉢ ---> ⓨ$=\dfrac{bm-ax}{bcx}=\dfrac{m}{c}(\dfrac{1}{x})-\dfrac{a}{bc}=\dfrac{1}{c}(\dfrac{m}{x}-\dfrac{a}{b})$ 라는 식이 나오고,

㉣ ---> ⓨ$=\dfrac{ax-bm}{bcm}=\dfrac{a}{bcm}x-\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{c}(\dfrac{a}{bm}x-1)$ 이라는 식이 나옵니다.

$x=\dfrac{b}{a}m$에서 ㉢과 ㉣은 연속입니다. 결국 넣어준 B의 몰수를 x라고 할 때 생성물의 몰수에 대한 남은 반응물의 몰수를 ⓨ라고 하면 연속함수가 하나 만들어지네요. 분수함수에서 일차함수로의 전환이 이뤄집니다.

이제는 ⓨ가 x에 반비례하는 상황이 생길 수가 있는지 살펴보는 일만 남았습니다. 결론부터 보면 실제 문항에서는 $x=\frac{b}{a}m$보다 작을 때와 클 때의 함수가 달랐기 때문에 우연히 이 값이 '비례관계를 갖는 것'처럼 보였다는 겁니다.
a와 m은 두고 b와 c에 대하여 각각 1과 2를 대입해보겠습니다.

ⓒ` ---> ⓨ$=\frac{1}{2}(\frac{m}{x}-a)$ 라는 식이 나오고,

ⓡ` ---> ⓨ$=\frac{1}{2}(\frac{a}{m}x-1)$이라는 식이 나옵니다. 훨씬 간단해졌네요.

이제 $x=\frac{b}{a}m$보다 작은 경우에 위에서 언급한 비례관계가 성립하는지 보기 위해 두 개의 x값을 대입할 겁니다. x가 각각 $tk$일 때, $sk$일 때로 보겠습니다. 물론 $t$와 $s$는 서로 값이 다르며 서로소이고, $k$는 비례상수입니다.

첫 번째, ⓒ`의 $(\frac{m}{2tk}-\frac{a}{2}):(\frac{m}{2sk}-\frac{a}{2})=s:t$라는 식에서 비례식을 정리하면 $s=t$라는 결과가 나옵니다. 이는 전제 조건에 모순이죠. 즉, 원래 실린더에 존재하는 반응물 A가 계속해서 남는 상황, 넣어주는 반응물 B가 계속해서 전부 소모되는 상황에서는 절대 비례관계가 일어날 수 없습니다. 심지어 위의 계산은 b와 c의 값을 정해놓고 계산하였는데 a~c값을 모두 모르더라도 항상 같은 결과($s=t$)가 나옵니다. aA+bB→cC 반응에서는 무조건 일어날 수 없는 상황이라는 겁니다.

두 번째, $(\frac{a}{2m}\times tk)-\frac{1}{2}:(\frac{a}{2m}\times sk)-\frac{1}{2}=s:t$라는 식을 볼 수 있습니다.
정리하면 $t(atk-m)=s(ask-m)$이라는 식이 나옵니다. 아까의 전제를 잊지 않으셨죠? 정리한 식은 $tk>\frac{m}{a}$, $sk>\frac{m}{a}$라는 전제 하에 이뤄진 식입니다. $x>\frac{b}{a}m$에서 b값을 1이라고 두었으니까요. 보아하니 방정식의 좌항과 우항이 모두 양수라는 것을 알 수 있게 해줍니다.

이 자체로는 특별한 의미를 끌어올 수 없을 것 같으니 바로 수능 20번의 상황으로 가보겠습니다. $k$를 1이라 두고, $t$와 $s$를 각각 2, 3이라고 둘 겁니다. 대입하면 $5a=m$이라는 식이 튀어 나옵니다. 실제 수능 20번에서 답은 $m$이 9이고, $a$가 4입니다. 그런데 위의 식은 뭘까요?

의미가 없습니다. $tk>\frac{m}{a}$, $sk>\frac{m}{a}$라는 전제에 어긋나기 때문입니다. $5a=m$을 전제에 대입하면 $tk$와 $sk$의 값은 적어도 5보다 커야합니다. 완전히 모순되는 상황이 와버린 거죠.
수능 20번에서의 결론입니다. 주어진 자료에 한해서는 반드시 남은 반응물이 달라야만 저런 비례 관계 비스무리한 상황이 벌어진다는 겁니다.

이제 두 번째 식에 대한 일반화를 해보겠습니다.

ⓡ ---> ⓨ$=\frac{ax-bm}{bcm}=\frac{a}{bcm}x-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}(\frac{a}{bm}x-1)$

이 식에 똑같이 $tk$와 $sk$를 대입한 후, $s:k$가 성립한다 하고 식을 정리하면

$\frac{ak}{bm}(s+t)=1$이라는 식, 즉 ⓜ ---> $\frac{a}{m}(tk+sk)=b$라는 식이 나오며

$tk>\frac{m}{a}$, $sk>\frac{m}{a}$이므로 $\frac{atk}{m}>1$, $\frac{ask}{m}>1$입니다. ⓜ의 좌항은 반드시 2보다 커야합니다.

결국 $b$가 3일 때부터 $x=\frac{b}{a}m$보다 클 때의 함수에 대하여 비례관계가 성립할 수 있습니다.

중요한 것은 <u>aA+bB→cC 반응에서 a와 c라는 계수에 상관없이 $b$가 3이상의 자연수라면 가능하다는 말과 동치입니다.</u>

연구 해놓고 보니 참으로 신기합니다.

저라면 식 ⓜ에 대한 문제를 낼 생각을 하겠죠?^_^