실전력극대화를 위한

1997학년도 수능 29번 문항논평 - 0.08%

정답률

29. 두 방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 7개, 9개이고 집합

$$A=\{(x,\ y)\mid P(x)Q(y)=0\text{이고 } Q(x)P(y)=0,\ x\text{와 } y\text{는 실수}\}$$

는 무한집합이다. 집합 A의 부분집합

$$B=\{(x,\ y)\mid (x,\ y)\in A\text{이고 } x=y\}$$

의 원소의 개수를 $n(B)$라고 하면 이것은 $P(x)$, $Q(x)$에 따라 변한다. $n(B)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

수능 역사상 정답률이 가장 낮은 문항의 하나입니다. 최근 기출문제가 아니기 때문에 접해보지 못한 경우가 많을 것이나 나형 30번(또는 21번) 문항의 해결을 위해서 반드시 학습할 필요가 있는 문항입니다.

문제가 요구하는 기본개념은 특별한 것이 없습니다. 방정식, 집합의 표현, 부분집합, 집합의 원소의 개수 모두 어렵지 않은 개념입니다. 그럼에도 이 문제의 정답률이 매우 낮은 것은 대략 세 가지 이유가 있습니다.

(1) 문제의 해결에 필요한 시간이 부족하였다.

1997년 수능은 전체적인 난이도가 매우 높은 시험이었습니다. 따라서 최소 10분 이상을 30번 문제의 해결에 사용할 수 있는 **현재의 상황과는 달랐습니다.** 이것은 이제는 **이 문제를 틀릴 경우에는 시간 부족은 이유가 될 수 없음을 뜻합니다.** 그럼에도 불구하고, 즉 문제 해결에 충분한 시간을 사용할 수 있음에도 이 문제를 해결하지 못한다면 그 이유를 반드시 찾아서 해결해야 할 것입니다.

(2) 문제가 묻고 있는 것을 명확하게 해석하지 못하였다.

방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 $7, 9$개임을 해석하는 것은 어렵지 않습니다. 그런데 집합 A를 해석하지 못하는 경우가 많습니다. 평소에 공부할 때 익숙하게 접할 수 있었던 표현은 아니기 때문입니다. **이때 가장 중요한 것은 있는 그대로 해석하는 것입니다.**

집합 A는 실수의 순서쌍의 집합입니다. 어떤 순서쌍인가에 대하여는 조건제시법으로 표현되어 있습니다. 따라서 아래에 주어진 조건을 해석해야 합니다.

$$\text{“ } P(x)Q(y)=0\text{이고 } Q(x)P(y)=0 \text{ ”}$$

이때 일반적인 뜻을 정확하게 해석할 수 있다면 가장 좋지만 사실 쉬운 것은 아닙니다. 이 조건은 우선 $P(x)=0$ 또는 $Q(y)=0$ 이고 $Q(x)=0$ 또는 $P(y)=0$ 인데 무슨 말인지 이해하기 어려운 경우가 많을 것입니다. 어떻게 해야 할까요?

구체적인 예를 통하여 이 표현을 이해하도록 노력해야 합니다. 최근에는 이런 경우 아예 문제에서 구체적인 예까지 제시하는 경우도 있지만 만약에 구체적인 예가 제시되어 있지 않다고 해도 문제가 이해가 되지 않는 상황이라면 **여러분 스스로 구체적인 예를 나열, 열거 하면서 문제를 이해해야 하는 것입니다.** 이 문항이 30번 문항의 해결과

밀접한 관련을 갖는 것은 내용적인 소재의 측면에서 조건, 집합과 같은 개념을 갖고 있기도 하지만, **30번 문제를 해결하기 위하여 필요한 문제해결능력의 측면이 훨씬 큽니다.**

예를 들어 보도록 하겠습니다.

이때 가장 중요한 것은 문제가 묻고 있는 것과 같은 상황에서 가장 간단하거나, 특수한 경우를 가정하는 것입니다. 그리고 이것은 이 자체로 매우 중요한 '문제 해결 능력'입니다. 유형별 해법을 제시하는 것처럼 어떻게 해야 '문제가 묻고 있는 것'을 유지하면서 간단하고 특수한 경우를 생각할 것인지 정리할 수 없습니다. 시행착오를 거치면서 문제를 해결하는 과정에서 생기는 '능력'인 것입니다.

이 문제의 경우에는 우선 방정식의 근의 숫자를 줄이는 것이 현명합니다. 근이 너무 많으면 구체적인 예를 드는 것도 복잡해질 수 있기 때문입니다. 또한 $P(x)=0$와 $Q(x)=0$의 교집합이 존재하도록 예를 드는 것도 필요합니다. 왜냐하면 문제가 묻고 있는 것은 집합의 B의 원소의 개수인데, $P(x)$, $Q(x)$에 따라 변한다고 제시되어 있기 때문입니다. 사실 이런 표현 없이 단순하게 $n(B)$의 최댓값을 구하라고 해도 아무런 문제가 없습니다. 그런데 문제의 해결을 도와주기 위하여 "$P(x)$, $Q(x)$에 따라 변한다"고 알려주고 있는 것입니다. 도움을 주는데 도움을 거절한다면 그래도 문제를 해결할 수 있어야 합니다. 문제는 틀리고 도움은 거절하고. 이것이 얼마나 멍청한 것인지는 제가 강조할 필요도 없을 것입니다.

방정식 $P(x)=0$의 근을 $1, 2$라고 하고 방정식 $Q(x)=0$의 근을 $2, 3$이라고 하면

$P(x)=0$을 만족하는 $x=1, 2$

$Q(y)=0$를 만족하는 $y=2, 3$

$Q(x)=0$를 만족하는 $x=2, 3$

$P(y)=0$를 만족하는 $y=1, 2$ 입니다.

따라서 이 조건을 구체적인 예를 이용하여 다시 쓰면

$x=1, 2$ 또는 $y=2, 3$ 이고 $x=2, 3$ 또는 $y=1, 2$ 입니다.

이제 이해가 됩니까? 어떤 사람은 이해가 될 것이고 어떤 사람은 여전히 이해가 되지 않을 수 있습니다. **그럼 더 구체적으로 써보면 됩니다.**

집합 A는 순서쌍의 집합이므로

$x=1, 2$ 인 순서쌍은 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)\cdots(2, 1), (2, 2), (2, 3)\cdots$ 같은 것이고

$y=2, 3$ 인 순서쌍은 $(1, 2), (2, 2), (3, 2)\cdots(1, 3), (2, 3), (3, 3)\cdots$ 입니다.

그런데 '또는' 이라고 했으므로 이 순서쌍의 합집합입니다. 그러면? 이제 알 수 있나요? 사실 이 문제가 요구하는 것은 이 조건이 좌표평면에서 직선 $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$로 나타남을 파악하는 것입니다. **그런데 이 정도까지 파악하지 못해도 '순서쌍의 나열'을 통해서 문제 해결에 필요한 핵심을 찾을 수는 있습니다.**

이제 뒤의 조건도 같은 방법으로 해석하면 '그리고'로 연결되어 있으므로 교집합을 찾으면 됩니다. 만약에 조건 $P(x)Q(y)=0$와 $Q(x)P(y)=0$가 좌표평면에서 직선의 방정식으로 나타남을 알았다면 문제를 더욱 간단하게 해결할 수 있었을 것입니다.

만약 $P(x)=0$와 $Q(x)=0$의 근에 공통근이 없다면 집합 A는 직선의 교점만을 의미하기 때문에 무한집합이 될 수 없습니다. 구체적인 예를 들면

$P(x)=0$을 만족하는 $x=1, 2$

$Q(y)=0$를 만족하는 $y=3, 4$

$Q(x)=0$를 만족하는 $x=3, 4$

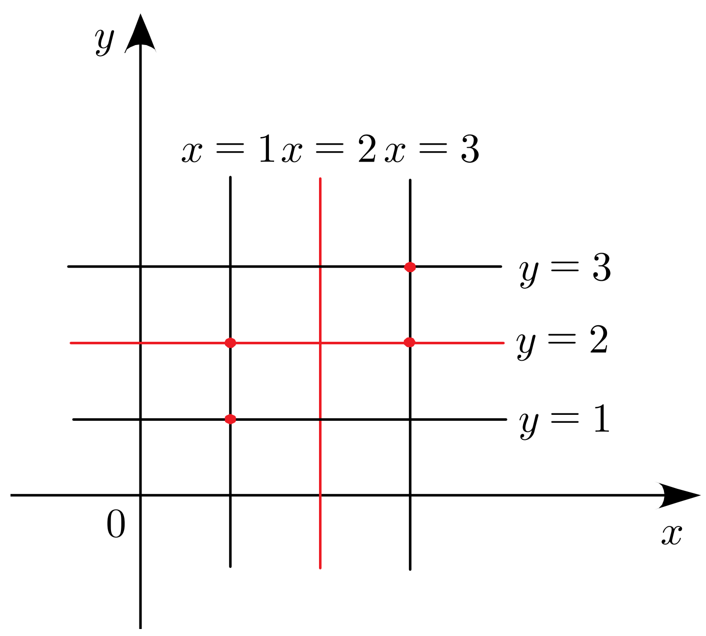
$P(y)=0$를 만족하는 $y=1, 2$ 입니다.

$x=1, 2$ 인 순서쌍은 $(1, 1), (1, 2), (1, 3)\cdots(2, 1), (2, 2), (2, 3)\cdots$ 같은 것이고

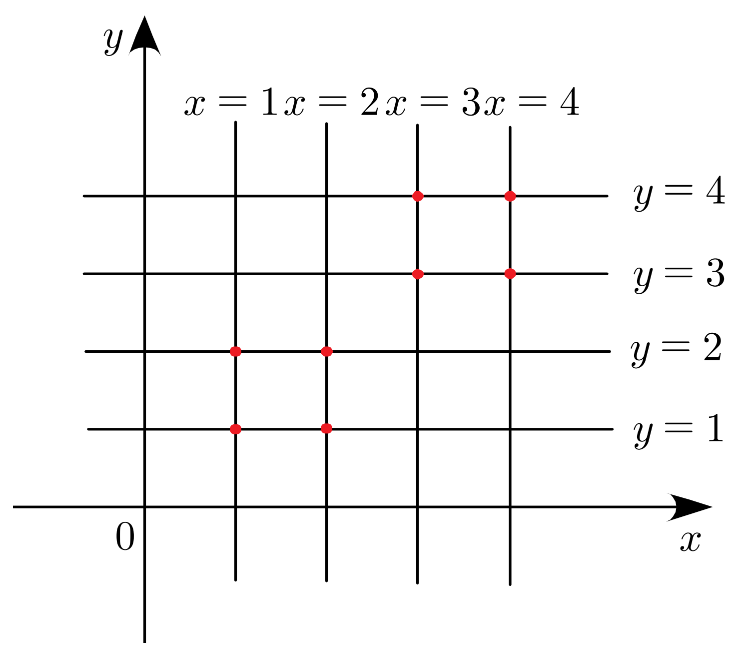
$y=3, 4$ 인 순서쌍은 $(1, 3), (2, 3), (3, 3)\cdots(1, 4), (2, 4), (3, 4)\cdots$ 입니다.

따라서 교집합을 구하면 만족하는 순서쌍은 $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)$ 입니다.

따라서 무한집합이 되려면 집합 A가 어떤 직선을 포함할 수 있어야 하기 때문에 공통근이 있어야 합니다.



< 공통근이 있는 경우 >



< 공통근이 없는 경우 >

집합 A를 좌표평면에 표현하는 것은 매우 중요합니다. 따라서 이 문제를 해결할 때 좌표평면을 이용하여 해결했다면 수학의 기본개념이 매우 탄탄하다고 할 수 있습니다. "실수의 순서쌍은 좌표평면에 점으로 나타난다." 라고 하면 누구나 다 '알고 있다'고 생각할 것입니다. 그런데 만약에 이 문제를 해결할 때 좌표평면을 이용하겠다는 발상을 하지 못한다면 심지어 문제를 맞힌 경우라고 해도 '기본개념이 부족한 상태'라고 할 수 있는 것입니다. 이런 경우에 '실수의 순서쌍은 좌표평면에 점으로 나타난다'는 것은 실전에는 이용하지 못하는 '죽은 지식'일 뿐입니다.

(3) 불확실한 상황에서 결정을 내리지 못한다.

문제의 해결은 유형별 해법을 기계적으로 적용하는 것으로 만족하고 있을 때 생기는 가장 큰 문제점은 불확실한 상황에서 결정을 하지 못하고 포기하고 만다는 것입니다. 이 문제에서도 그런 현상이 많이 나타납니다.

문제가 묻고 있는 것은 결국에는 집합 B에 관한 것입니다. 만약 집합 A가 뜻하는 것이 정확하게 해석되지 않는다고 가정해봅시다. 그러면 집합 B를 우선 생각해보면 됩니다. 집합 B는 집합 A의 부분집합이므로 비록 해석하지 못하였지만 표현을 있는 그대로 다시 써 보겠습니다.

$B=\{(x,\ y)\,|\,P(x)Q(y)=0$ 고 $Q(x)P(y)=0,\ x=y\}$ 입니다. 결정적인 조건이 있습니다. $x=y$ 입니다!
따라서 이제 다시 써보면
$B=\{(x,\ x)\,|\,P(x)Q(x)=0$ 이고 $Q(x)P(x)=0\}$ 입니다. 앞 뒤의 조건이 같아지기 때문에 결국에 집합
$B=\{(x,\ x)\,|\,P(x)Q(x)=0\}$ 일 뿐입니다.

이제는 굳이 순서쌍일 이유도 없고 따라서 $B=\{x\,|\,P(x)Q(x)=0\}$입니다. 문제가 묻고 있는 것은 $n(B)$의 최댓값입니다. $B=\{x\,|\,P(x)=0\}$ $\{x\,|\,Q(x)=0\}$ 이고 이 원소의 개수가 $P(x)$, $Q(x)$에 따라 변한다고 되어 있습니다.

집합 $P=\{x|P(x)=0\}$ 라고 하고, 집합 $Q=\{x|Q(x)=0\}$ 라고 하면, $n(B)=n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)$ 입니다. 결국 $n(P)=7$, $n(Q)=9$ 이고 문제가 묻고 있는 것은 $n(P\cap Q)$의 최솟값입니다. 이 정도면 설령 더 이상 아무것도 알 수 없어도 '찍어서' 문제를 맞히는 경우도 많아야 정상일 것입니다.

제대로 문제를 맞히기 위해서는 A가 무한집합이라고 하는 것을 해석은 해야 합니다. 하지만 이런 과정을 거쳐 간다면 이제 다시 A의 해석으로 돌아가서 좌표평면에 표현하지 않아도 순서쌍을 나열해가는 것만으로 문제의 핵심을 찾을 수 있을 것입니다.

물론 문제가 쉽다고 하는 것은 아닙니다. 현재의 난이도에서 조금만 더 복잡해진 상태로 30번으로 출제될 수 있는 수준의 높은 난이도의 문제임은 분명합니다. 문제를 해결하는 과정에서 좌표평면을 이용하여 A집합을 정확하게 나타내는 것까지 포함하면 출제의도에 맞도록 해결하는 것은 쉬운 일은 아닙니다.

그런데 실제 문제의 정답률이 보여주는 것은 대다수의 학생이 문제를 해결한다는 것에 대해서 잘못된 생각을 하고 있음을 알려줍니다. 최근의 수능 문제의 출제경향은 이전과는, 특히 1997년과 같은 수능과는 많이 달라져있습니다. 단순히 시험범위만 변한 것은 아닙니다. 그런데 1등급 이상을 목표로 하고 있다면, 그 점수를 결정하는 문항의 성격은 변한 것이 없습니다. 오히려 다른 문항의 난이도가 매우 낮아졌으며, 유형별 해법을 기계적으로 암기해서 해결할 수 있는 수준으로 출제되고 있음을 감안하면 결국 1등급 이상을 결정하는 문항은 오히려 과거의 이런 문항보다 난이도는 더 높아졌다고 해야 할 것입니다.

참고로 유형별 해법을 기계적으로 암기해서 해결하는 방법이 비효율적이라고 하는 것하고, 그렇게도 해결할 수 있다는 것은 다른 말입니다. 이러한 방법은 비효율적입니다. 교육적으로 바람직하지 않음은 평가원도 잘 알고 있지만 현실적인 난이도 조정을 위해서는 어쩔 수 없는 모양입니다.

이런 의미에서 이 문항은 1등급 이상을 목표로 하는 수험생은 많은 것을 배워야 하는 문항입니다. 문항 자체도 매우 수준이 높은 문항이며, 내용적인 면에서도 공부할 것이 있습니다. **그런데 가장 중요한 것은, 실제 문제를 해결 못하는 근본원인을 찾아서 해결하는 것입니다.** 이 문항은 그런 반성의 소재로 매우 적합하다고 생각합니다.