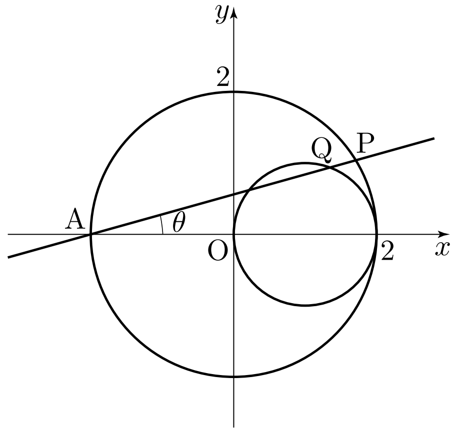
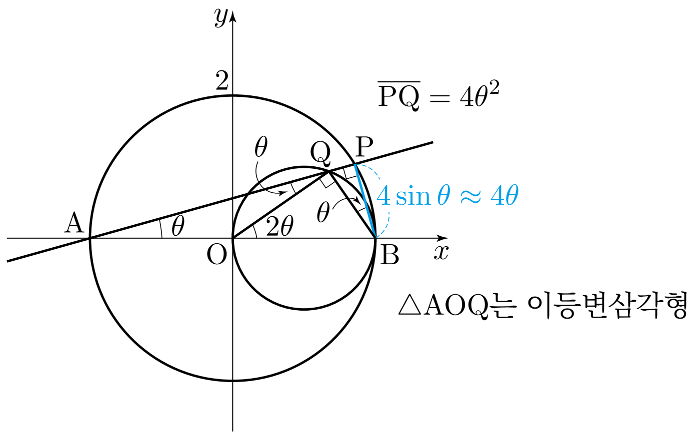
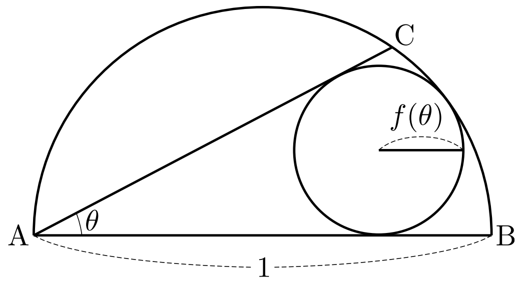
그림과 같이 점 $A(-2,0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때, 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle OAP=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{PQ}}{\theta^2}$의 값은?





θ가 0으로 갈수록, $\overline{AO}=\overline{OQ}$가 될 것이므로, $\triangle AOQ$는 이등변 삼각형이 될 것입니다. 따라서 $\angle QBP=\theta$가 될 것 입니다. 삼각형 ABP에서 $\overline{BP}=4\sin\theta\approx4\theta$이고, 삼각형 QBP에서 $\overline{PQ}=4\sin\theta\times\sin\theta\approx4\theta^2$이므로 답은 $\lim_{\theta\to0}\frac{4\theta^2}{\theta^2}=4$가 됩니다.

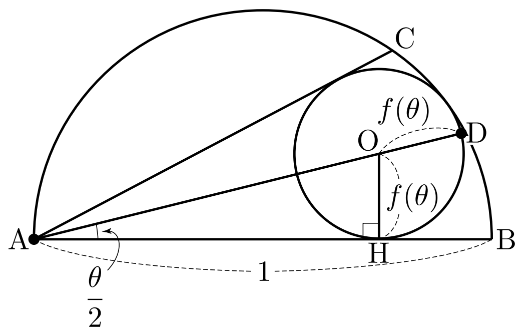
그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle \mathrm{BAC} = \theta$라 하자.



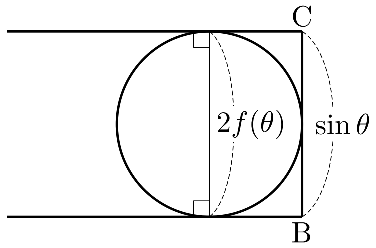
호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$라 할 때,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\tan\frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2}$$

의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



각 θ가 0에 감에 따라 $\overline{\mathrm{AD}} \approx 1$이 될 것입니다. 따라서 삼각형 AOH에서, $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{f(\theta)}{\overline{\mathrm{AO}}}$입니다. $\overline{\mathrm{AO}} = 1 - f(\theta)$이므로 이를 정리하면, $\sin\frac{\theta}{2} - f(\theta) = \frac{\theta}{2} f(\theta)$가 됩니다.



삼각형 ABC에서 θ가 0으로 가까이 가면, 위의 그림과 같이 되므로, $2f(\theta)=\sin\theta$가 되고 $f(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{2}$가 됩니다. $\sin\dfrac{\theta}{2}-f(\theta)\approx\dfrac{\theta}{2}-f(\theta)=\dfrac{\theta}{2}f(\theta)=\dfrac{\theta^2}{4}$이므로

$\tan\dfrac{\theta}{2}\approx\sin\dfrac{\theta}{2}\approx\dfrac{\theta}{2}$ 이므로, $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\theta}{2}\times\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=\frac{1}{4}$가 답이 됩니다.