미적분2 - Point INDEX

1. 지수함수와 로그함수

- Point 1) 지수로그함수 실생활 활용
- Point 2) 지수로그함수 합답형 (ㄱㄴㄷ)
- Point 3) 지수로그함수 계산형 (그래프& 방부등식)
- Point 4) 간단한 귀납적 추론

2. 삼각함수

- Point 1) $\tan$의 덧셈정리 (두 직선이 이루는 각) [연계 : App 2 보조선]
- Point 2) 삼각함수 방부등식의 해결법
- Point 3) 삼각함수 도형 극한 [연계: App 2 보조선, App 8 닮음각]

3. 미분법

- Point 1) 미분계수의 정의와 미분가능성
- Point 2) 접선의 방정식 [연계 : App 5 접선]
- Point 3) 절댓값 함수 $|f(x)|$의 미분가능성
  - Eureka Point 1) 변곡접선 [연계 : App 5 접선]
  - Eureka Point 2) $|f(x)-g(x)|$의 미분 가능성
- Point 4) 미분과 방 부등식 [연계 : App 4 함수 - 2. 새롭게 정의된 함수]
- Point 5) 미분 불가능, 불연속의 후보군
  - Eureka Point 3) $f(x)-g(x)$함수와 대소 비교 함수
- Point 6) 사이값의 정리, 롤의 정리, 평균값의 정리 & 미분의 합답형 문제(ㄱㄴㄷ)

4. 적분법

- Point 1) 치환적분과 부분적분
- Point 2) 적분 변수에 대한 이해
- Point 3) 적분할 수 없는 함수에 대하여
  - Eureka Point 4) 적분 Killer 문제의 Tip [연계 : App 1 변수와 관계식]
- Point 4) 적분의 합답형 문제 (ㄱㄴㄷ)
- Point 5) 정적분으로 정의된 함수 [연계 : App 6 정적분의 기본 정리와 변화율]

Appendix Point 8) 극한의 Speed 해법 (난짱극) (심화)

함수의 극한과 도형을 결합한 문항에서 극한의 상황을 가정하여 문제를 푼다면 쉽게 문제를 푸는 방법이 있습니다. 이를 제 나름대로 정리한 방법이 제 아이디를 따라서 난짱극이라 불리게 되었고, 지금 여러분께 어느 정도 소개를 해드리려 합니다. 꼭 이 방법으로 문제를 풀 필요는 없는 것이고, 때로는 난짱극 보다 계산을 통해 정직하게 푸는 것이 훨씬 나을 수도 있습니다. 이 부분을 포인트에서 제외하고 뒤로 빼놓은 이유는 **그 만큼 계산으로 문제를 푸는 것이 현 수능상황에선 더 바람직하기 때문입니다.** 하지만, 자세히 알고 있고 제대로 적용할 수 있다면 다른 여타 쉬운 문항에서는 분명히 큰 이점을 가져갈 수 있고 검산 시에도 유용하게 쓸 수 있으므로 본인이 적용 할 수 있다면, 선택에 따라 이 방법을 이용하여 문제풀이에 쓰시길 바랍니다.

첫 번째로 이해해야 하는 부분은 "극한의 계산에서 속도"와 관련된 부분입니다.
다음 두 문항을 한 번 보시죠.

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x+1}{x^2} = ?$

x가 무한대로 가는 상황에서는 다들 아시다시피 최고차항의 계수로 나누어

$\lim_{x \to \infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{1} = 2$라는 걸 모두 아실 것입니다. 즉, x가 무한대로 가는 상황에서는 "최고차항의 계수만이 의미가 있다" 라는 결론이 가능합니다.

$x \to \infty$인 상황에서는 최고차항의 계수만 의미가 있다

이번에는 이 문제를 한 번 봅시다.

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{3x^2+4x} = ?$

이 문제는 어떨까요? $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$을 이용하여 문제를 풀면,

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2+x)}{x^2+x} \frac{x^2+x}{3x^2+4x} = \frac{1}{4}$이라는 걸 모두 아실 것입니다. 즉, x가 0으로 가까이 간다면

"최저 차항의 계수만이 의미가 있다" 라는 결론이 가능합니다.

위 아래를 통합하여 생각하여 보면

1) x가 무한대로 간다면 **최고차항이 커지는 속도를 나머지 차항들이 따라갈 수 없으므로,**
최고차항의 계수만 의미가 있고
2) x가 0으로 간다면 **최저차항이 가장 느리게 0으로 가므로** 최저차항의 계수만이 의미가 있는 것입니다.

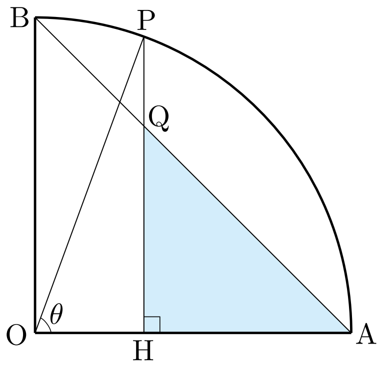
따라서 $\lim_{x\to0}\frac{\tan(5x^3+34x^2+3x)}{5x^2+2x}$등의 복잡한 식이 있더라도 답은 그냥 $\frac{3}{2}$가 된다는 걸 쉽게 알 수 있습니다.

$x\to0$인 상황에서는 x의 최저차항의 계수만 의미가 있다

대부분의 극한과 도형이 합쳐진 문항에선 문제의 형태가 $\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}, \lim_{\theta\to0}\frac{l(\theta)}{\theta}$등의 모양을 띠고 있습니다. 이는 즉 θ가 0으로 가는 사항에서 분모가 각각 **2차 항 1차 항** 이므로, $S(\theta)$는 2차 항 까지만 근사를 해야 하고 , $l(\theta)$는 1차 항 까지만 근사를 해야지 계산이 된다는 것입니다. 쉬운 예로 $\lim_{\theta\to0}\frac{l(\theta)}{\theta}$에서 $l(\theta)=3\theta^2$이라면 답이 0이 될 테니 의미가 없겠지요?
즉, 문항에서 묻는 것을 통해 몇 차식 까지 고려할 지를 생각하는 것입니다.

[예제 1] 2016학년도 대학수학능력시험 수학가형 14번

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자.



$\angle \mathrm{POH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

즉, 다음과 같은 문항을 보았을 때, "$S(\theta)$는 4차 항으로 근사를 해야겠다."라는 생각을 할 수 있으시면 됩니다.

다음으로 아셔야 할 부분은 이제 어떻게 근사를 할 것인가에 대한 부분입니다. 일부 학생들은 학원 또는 어떤 인강을 통해 $\sin\theta \simeq \theta$ 다를 들어보셨을 겁니다.

교과 외에 테일러 근사식을 통해서 얻은 식들인데, 다음과 같은 생각을 해주시면 될 것 같습니다.

$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}=1$이므로 θ가 0으로 간다면 마치 "$\sin\theta$는 θ와 동일하게 움직일 것이다"라고 생각해주시면 됩니다. 실제로 $\sin x$의 0에서의 접선 식은 $y=x$가 되므로, x가 아주 작아져 0에 가까워져 간다면 $\sin x$ 그래프는 마치 $x=0$에서의 접선과 일치하여 움직이게 되겠지요?

교과 내의 초월함수의 극한값을 이용해 보면

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta}=1,\ \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2},\ \lim_{\theta \to 0} \frac{\sec\theta-1}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

등의 값 등을 아실 것입니다.

즉, **$\tan\theta, \sin\theta$는 최저 차항이 1차 항인 식**으로 근사가 가능하다는 것,

$1-\cos\theta, \sec\theta-1$ 등은 최저 차항이 2차 항까지 근사가 가능하다는 점입니다.

이와 유사하게,

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$도 비슷하게, $e^x-1, \ln(1+x)$는 x가 0 근처에서 마치 $y=x$와 유사하게 행동 한다 정도 아시면 됩니다. 물론 위 두 식 역시나 최저 차항이 1차식인 식으로 근사가 되겠지요. 이 정도 아신 뒤는 테일러 근사를 통해 각종 초월함수를 어떻게 근사할 수 있는가를 외우셔야 합니다.

1) $\sin x \simeq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots$ 2) $\cos x \simeq 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\cdots$

3) $\tan x \simeq x+\frac{x^3}{3}+\cdots$ 4) $\sec x \simeq 1+\frac{x^2}{2}+\cdots$

5) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ 6) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots$

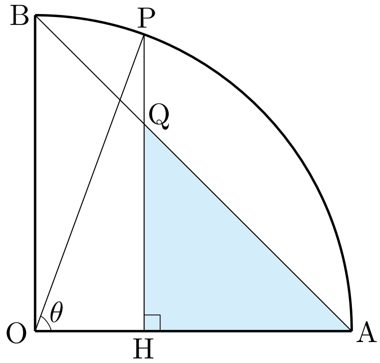
[그림]

[그림]의 근사식을 모조리 외우기 힘들다면 $\sin x, \tan x$는 3차 항 까지만, $\cos x, \sec x$는 2차 항까지 e^x는 다 외우시는 게 좋고, $\ln(1+x)$역시나 2차 항까지만 외우시면 큰 무리가 없습니다.

$\sin, \tan, \cos$등 여러 초월함수로 표현된 길이나 넓이 등을 몇 차식인지 추론할 수 있습니다.

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의

점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 선분 AB의 교점을 Q라 하자.



$\angle$POH$=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

다들 아시다시피 $\overline{OH} = \cos\theta$이기 때문에 $\overline{HA} = 1 - \cos\theta$가 됩니다. 즉, 최저 차항이 2차로 근사할 수 있는 형태가 되었지요? 여기서 $\triangle$AHQ는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{HQ}$ 역시나 2차로 근사가 되는 $1-\cos\theta$의 형태가 됩니다.

그렇다면 위에서 논의 했다시피 $S(\theta)$는 2차 항의 두 곱으로 이루어졌으니, 4차식이 되어 $S(\theta) = \frac{1}{2} \times (\frac{\theta^2}{2})^2 = \frac{\theta^4}{8}$가 되므로 답은 $\frac{1}{8}$이 됩니다. 즉, 문항을 통해 우리가 표현하고자 하는 $S(\theta)$를 몇 차 까지 나타내어야 하는가를 결정한 뒤, 그 차 항에 맞게 근사를 해주시면 됩니다.

예를 들면, $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$와 같은 문제를 만난다면,

당연히 $\tan x - \sin x, 2\sin x - \sin 2x$ 모두 3차 항으로 근사를 해야만 답이 나올 것입니다.

위에서 배운 근사식에 대입하여 3차 항까지 계산하면,

$\tan x - \sin x \simeq \frac{x^3}{2}, 2\sin x - \sin 2x \simeq x^3$이 되어

위 두 문제의 답은 각각 $\frac{1}{2}$,1이 답이 될 것입니다.