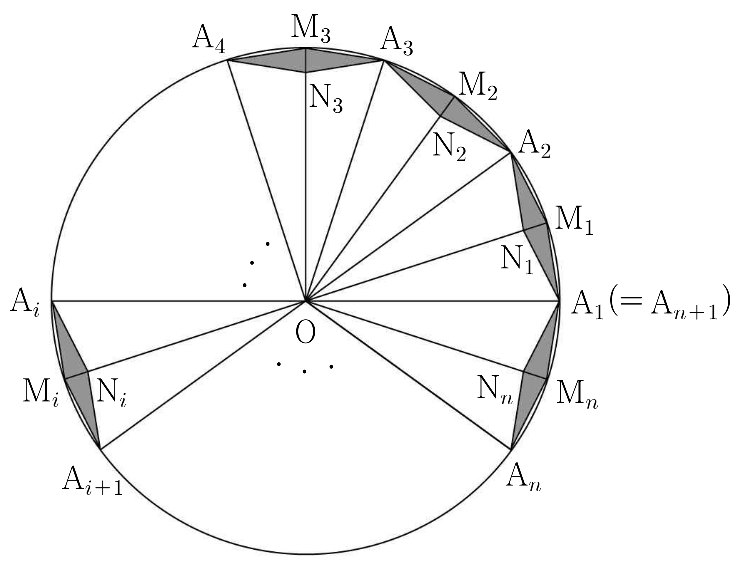
고지우의 난문현답

제 5 일

1. 2016년 7월 교육청
2. 2011년 10월 교육청
3. 2016년 수능
4. 2012년 6월 평가원
5. 2010년 9월 평가원
6. 2012년 9월 평가원
7. 2006년 수능
8. 2011년 경찰대
9. 2006년 수능
10. 2006년 10월 교육청

1. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n\,(n \geq 4)$등분한 점을 A_1, A_2, $\cdots$, A_n이라 하자.
호 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 이등분한 점을 M_i라 하고 사각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i$가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i라 하자. n개의 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{M}_1\mathrm{A}_2\mathrm{N}_1$, $\mathrm{A}_2\mathrm{M}_2\mathrm{A}_3\mathrm{N}_2$, $\mathrm{A}_3\mathrm{M}_3\mathrm{A}_4\mathrm{N}_3$, $\cdots$, $\mathrm{A}_n\mathrm{M}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{N}_n$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(n^2 \times S_n\right)$의 값은? (단, $\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_1$) [4점]



① π^3 ② $2\pi^3$ ③ $3\pi^3$ ④ $4\pi^3$ ⑤ $5\pi^3$

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수

$$f(x)=x^3-3x^2+15,\ g(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$$

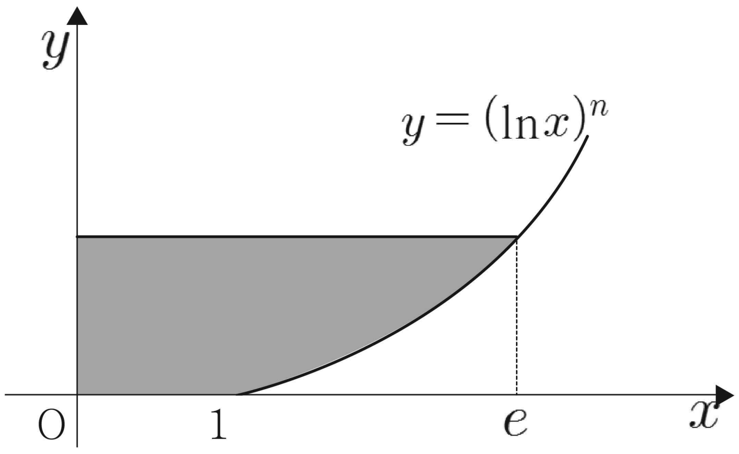
에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점]

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$일 때, $f(x)=a(x-b)^2+c$이다. (단, a, b, c는 상수이다.)
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\int_0^x \sqrt{4-2f(t)}\,dt$이다.

$\int_0^6 f(x)dx=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

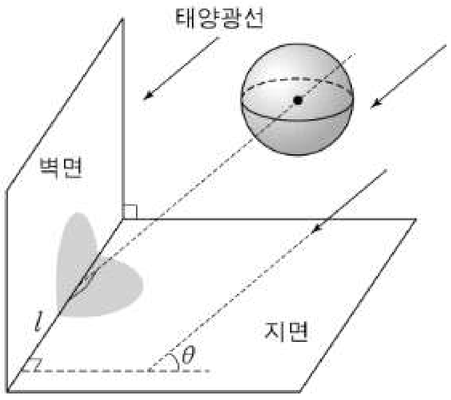
4. 2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=(\ln x)^n\,(x \ge 1)$과 x축, y축 및 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 하자
[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $1 \le x \le e$일 때, $(\ln x)^n \ge (\ln x)^{n+1}$이다.
ㄴ. $S_n < S_{n+1}$
ㄷ. 함수 $f(x)=(\ln x)^n(x \ge 1)$의 역함수를 $g(x)$ 라 하면 $S_n=\int_0^1 g(x)dx$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

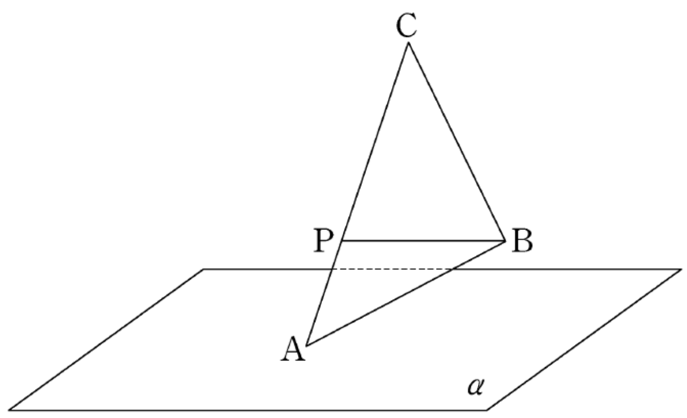
5. 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 구 모양의 공이 공중에 있다. 벽면과 지면은 서로 수직이고, 태양광선이 지면과 크기가 θ인 각을 이루면서 공을 비추고 있다. 태양관선과 평행하고 공의 중심을 지나는 직선이 벽면과 지면의 교선 l과 수직으로 만난다.
벽면에 생긴 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 a라 하고, 지면에 생기는 공의 그림자 위의 점에서 교선 l까지 거리의 최댓값을 b라 하자 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. 그림자와 교선 l의 공통부분의 길이는 $2r$이다. ㄴ. $\theta=60^\circ$ 이면 $a<b$이다. ㄷ. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{r^2}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 1,3인 두 점 B,C가 있다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오. [4점]



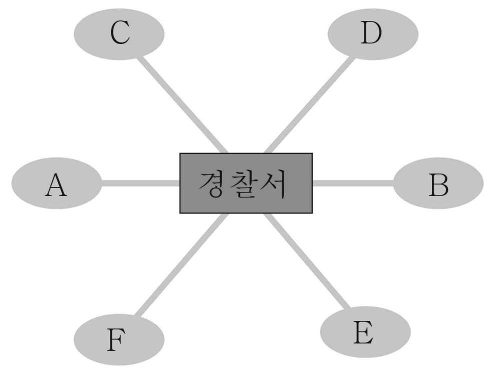
7. 좌표공간에서 xy평면, yz평면, zx평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서

구 $(x+2)^2+(y-3)^2+(x-4)^2=24$

가 지나는 부분의 개수는? [4점]

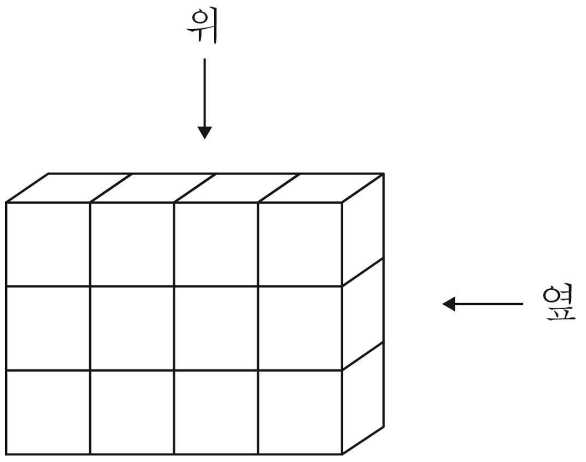
① 4　　② 5　　③ 6
④ 7　　⑤ 8

8. 아래 그림과 같이 A, B, C, D, E, F의 6개의 구역이 경찰서를 중심으로 하여 길로 연결되어 있다. A와 B의 넓이는 각각 4km^2이고 C, D, E, F의 넓이는 각각 2km^2이다.
2명의 경찰관이 이 6개의 구역을 넓이의 합이 같아지도록 2부분으로 나누어 1부분씩을 맡고, 각자 맡은 모든 구역을 순서를 정하여 순찰하는 방법의 수는?
(단, 1개의 구역을 나누지는 않는다.)

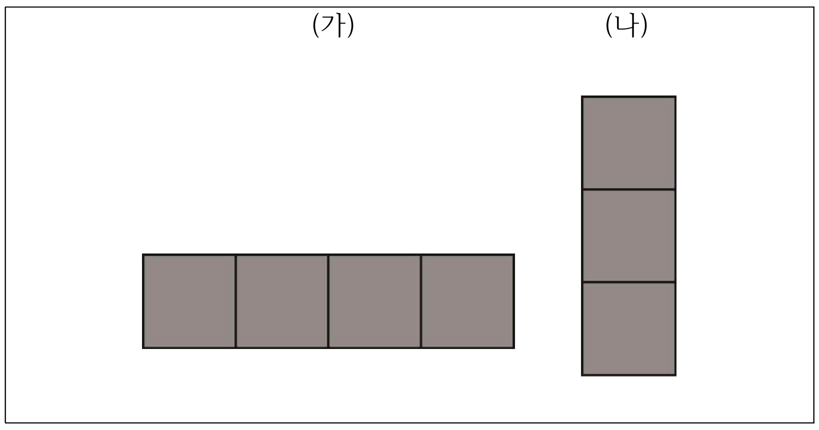


① 524　　② 528　　③ 532
④ 536　　⑤ 540

9. 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는? [4점]



① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

10. 아래 그림은 어떤 오락기를 단순화하여 그린 것이다. 이 오락기는 입구에서 공을 넣으면 A, B, C, D 중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다.

예를 들어 전구가 모두 꺼진 상태에서 공을 두 번 넣어 두 번 모두 A를 지나면 A위치의 전등은 켜졌다 꺼지고, 각각 A, B를 지나면 A, B 두 위치에 있는 전등은 모두 켜지게 된다. 이와 같이 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A, B, C, D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다. 여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률을 $\frac{a}{b}$라고 하자. (a, b는 서로소인 자연수). 이때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며, 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.) [4점]