2018학년도 3월 전국연합학력평가(수학)

4점 문제 해설

※ 본문을 읽기 전에, 먼저 읽어주세요!

2) 본 해설은 필자가 단독으로 다른 해설을 참고하지 않고 만들어낸 것이므로 다소 매끄럽지 않은 부분이 있을 수도 있습니다. 양해 부탁드립니다.

4) 이 문서를 통해 많은 분들이 도움을 받으셨으면 좋겠습니다.

* 제작자: 그린란드(이재종)
(http://blog.naver.com/wowhd93)
* 최종 수정일: 2017. 3. 12. 00:49

‘가’ 형

Problem #14

14. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이고, $0 \le x < 2$일 때 $f(x)=\dfrac{(x-a)^2}{x+1}$인 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. 구간 $[0, 2)$에서 극솟값을 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 곱은? [4점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

Solution

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극대이므로

$x=0$ 근방의 x에 대하여 $f(x) \le f(0)$이어야 합니다.

$\Rightarrow \lim_{x \to 0+} f(x) \le f(0)$ 그리고 $\lim_{x \to 0-} f(x) \le f(0)$

(여기서 <u>미분을 이용하지 않도록 주의</u>합니다.)

$i)$ $\lim_{x \to 0+} f(x) \le f(0)$

$f(x)$는 구간 $[0, 2)$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0) = a^2 \quad \therefore \lim_{x \to 0+} f(x) \le f(0)$

$ii)$ $\lim_{x \to 0-} f(x) \le f(0)$

임의의 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x) = \frac{(2-a)^2}{3}$$

따라서 $\lim_{x \to 0-} f(x) \le f(0)$

$$\Rightarrow \frac{(2-a)^2}{3} \le a^2, \quad a^2+2a-2 \ge 0 \quad \cdots (1)$$

한편 $f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로

$$f'(x) = \frac{2(x-a)(x+1)-(x-a)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-a)(x+2+a)}{(x+1)^2}$$

따라서 $f(x)$는 $x=a$ 또는 $x=-2-a$에서 극솟값을 가집니다.

가) $x=a$에서 극소인 경우

$0 < a < 2$이고 a는 정수이므로 $a=1$

이는 (1) 또한 만족하므로 문제의 조건을 만족합니다.

나) $x=-2-a$에서 극소인 경우

$0 < -2-a < 2$이고 a는 정수이므로 $a=-3$

이는 (1) 또한 만족하므로 문제의 조건을 만족합니다.

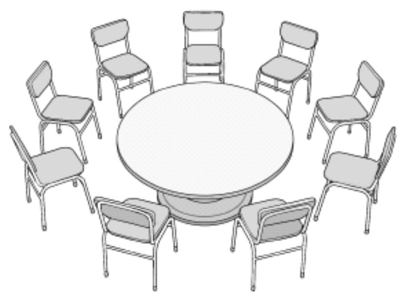
따라서 문제의 조건을 만족하는 모든 정수 a의 값의 곱은 -3입니다.

정답: ①

Problem #15

15. 여학생 3명과 남학생 6명이 원탁에 같은 간격으로 둘러앉으려고 한다. 각각의 여학생 사이에는 1명 이상의 남학생이 앉고 각각의 여학생 사이에 앉은 남학생의 수는 모두 다르다. 9명의 학생이 모두 앉는 경우의 수가 $n \times 6!$일 때, 자연수 n의 값은? (단, 회전하여 일치하는 것들은 같은 것으로 본다.) [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18



Solution

여학생 사이에 앉는 남학생들의 수는 각각 1명, 2명, 3명이어야 합니다.

즉, 여학생은 그 사이에 의자가 1개, 2개, 3개 있도록 아무렇게나 앉으면 되는데, 여학생들이 앉을 의자를 선택하는 방법은 아래와 같은 2가지가 있습니다.


다른 의자 3개를 선택하더라도, 회전하게 되면 항상 위와 같은 모양이 됩니다.

위에서 선택된 3개의 의자는 모두 간격이 달라 구별되는 자리들이므로 여학생을 앉히는 방법의 수는 $3!=6$이고, 남학생들도 서로 구별되는 6개의 자리에 앉게 되므로 남학생을 앉히는 방법의 수는 $6!$이 됩니다.

따라서 9명의 학생을 문제의 규칙에 따라 앉히는 방법의 수는 $2\times3!\times6!=12\times6!$ $\quad\therefore\ n=12$

정답: ②

Problem #16

16. 연속함수 $f(x)$가

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=12,\quad \int_{0}^{1} xf(x)dx=\int_{0}^{-1} xf(x)dx$$

를 만족시킨다. $\int_{-1}^{x} f(t)dt=F(x)$라 할 때, $\int_{-1}^{1} F(x)dx$의 값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

Solution

문제의 조건에서

$$\int_{0}^{1} xf(x)dx=\int_{0}^{-1} xf(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} xf(x)dx=-\int_{-1}^{0} xf(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} xf(x)dx+\int_{-1}^{0} xf(x)dx=0$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$$

문제의 적분식에 부분적분법을 이용하면,

$$\therefore \int_{-1}^{1} F(x)dx=\int_{-1}^{1} 1\cdot F(x)dx$$

$$=\left[xF(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1} xf(x)dx \quad [\because F'(x)=f(x)]$$

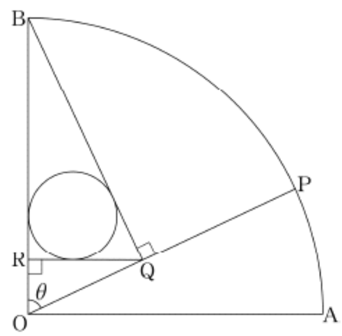
$$=F(1)+F(-1)\quad \left[\because \int_{-1}^{1} xf(x)dx=0\right]$$

$$=\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{-1}^{-1} f(x)dx=12$$

정답: ④

Problem #17

17. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 점 B에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 Q, 점 Q에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 R라 하자. $\angle BOP=\theta$일 때, 삼각형 RQB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

Solution

삼각형 RQB의 세 변의 길이를 θ에 대하여 표현합시다.

$\overline{OB}=1 \Rightarrow \overline{BQ}=\sin\theta$

$\angle BQR=\theta \Rightarrow \overline{RQ}=\overline{BQ}\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$

$\overline{BR}=\overline{BQ}\sin\theta=\sin^2\theta$

삼각형 RQB의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\overline{BR}\cdot\overline{RQ}=\frac{1}{2}(\overline{BR}+\overline{RQ}+\overline{BQ})r(\theta)$$

$$\Rightarrow r(\theta)=\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{\theta^2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta+1)}$$

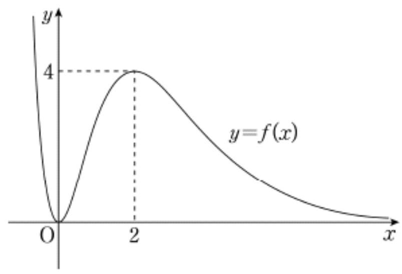
$$= \lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

정답: ①

Problem #18

18. 그림은 함수 $f(x)=x^2e^{-x+2}$의 그래프이다.



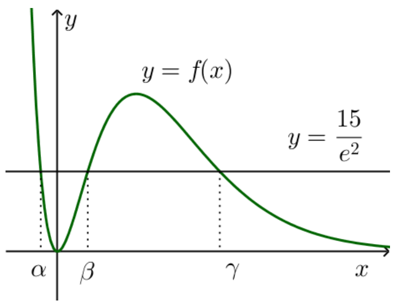
함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{15}{e^2}$의 교점의 개수는? (단, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$) [4점]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

Solution

$e>2$로부터 $\frac{15}{e^2}<4$이고, 이를 이용하여

$y=f(x)$와 $y=\frac{15}{e^2}$을 그리면 아래와 같습니다.



위 그림과 같이 방정식 $f(x)=\frac{15}{e^2}$은 3개의 실근을 갖고, 그 근을 각각 $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 하면

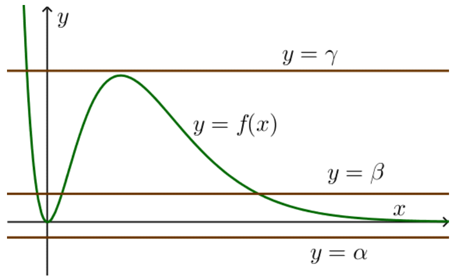
$y=(f\circ f)(x)$와 $y=\frac{15}{e^2}$의 교점의 개수는

$y=f(x)$와 세 직선 $y=\alpha,\ y=\beta,\ y=\gamma$의 모든 교점의 개수를 합한 것과 같습니다.

$\alpha<0,\ 0<\beta<2$이고,

$f(4)=\frac{16}{e^2}>\frac{15}{e^2}$이고, $f(x)$는 구간 $(2,\ \infty)$에서 감소하므로 $\gamma>4$입니다.

이를 이용하여 $y=f(x)$와 $y=\alpha,\ y=\beta,\ y=\gamma$을 좌표평면에 나타내면 아래와 같습니다.



따라서 $y=(f\circ f)(x)$와 $y=\frac{15}{e^2}$의 교점의 개수는

4개입니다.

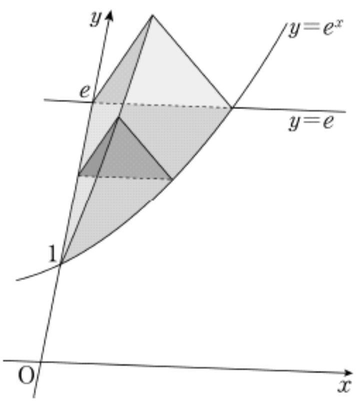
정답: ③

Problem #19

19. 곡선 $y=e^x$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}(e+1)}{4}$　② $\frac{\sqrt{3}(e-1)}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}(e-1)}{4}$

④ $\frac{\sqrt{3}(e-2)}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{3}(e-2)}{4}$



Solution

곡선 $y=e^x$와 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형은 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 도형과 합동입니다. (역함수를 생각합시다.)

$x=t$에서 정삼각형 모양의 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면 정삼각형의 한 변의 길이가 $\ln t$이므로

$$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\ln t)^2$$

이 입체도형은 $t\in[1,\ e]$인 t에 대하여 정의되므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^e \frac{\sqrt{3}}{4}(\ln t)^2 dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^e (\ln t)^2\cdot 1dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(e-2\int_1^e \ln t dt\right) \text{ (부분적분 이용)}$$

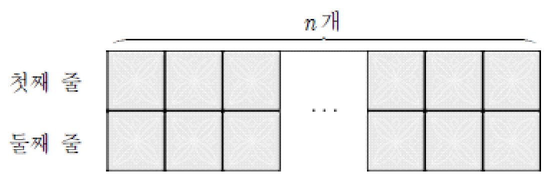
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(e-2)$$

정답: ⑤

※ $\int_1^e \ln x dx=1$은 기억해두면 이용하기 좋습니다.

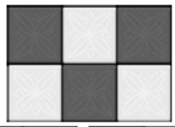
Problem #20

20. 그림과 같이 가로로 n개, 세로로 2개씩 총 $2n$개의 크기가 같은 정사각형 모양의 타일을 이어 붙인다.

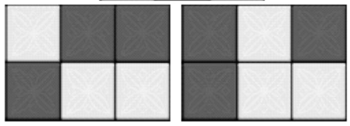


이 타일 중에서 3개를 골라 검은색으로 칠하되, 검은색으로 칠한 타일이 서로 이어 붙지 않게 하려고 한다. 다음은 검은색으로 칠한 타일이 이어 붙지 않은 경우와 이어 붙은 경우의 한 예이다.

이어 붙지 않은 경우:



이어 붙은 경우:



다음은 $n\geq 6$일 때, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수 $S(n)$을 구하는 과정이다.

> 첫째 줄에 있는 타일 중 검은색으로 칠할 타일의 개수를 $k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$이라 하면
> (ⅰ) $k=0$일 때 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이다.
> (ⅱ) $k=1$일 때 둘째 줄에 있는 n개의 타일 중에서 검은색으로 칠할 타일 2개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}$이고, 첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이므로, 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_{n-3}\times\boxed{\text{(나)}}$이다.
> (ⅲ) $k=2$일 때 (ⅱ)와 같은 방법으로 구할 수 있다.
> (ⅳ) $k=3$일 때 (ⅰ)과 같은 방법으로 구할 수 있다.
> 따라서 $S(n)=\dfrac{2(n-2)(2n^2-8n+9)}{3}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(10)+g(8)$의 값은? [4점]

① 60　② 61　③ 62　④ 63　⑤ 64

Solution

(가) :

위와 같이 3개의 검은 타일과 $n-3$개의 검은 타일을 나타내고, (1), (2), (3), (4) 자리에 들어갈 하얀 타일의 수를 각각 $x,\ y,\ z,\ w$라 하면

$x+y+z+w=n-3\ \ (x,\ w\geq 0,\ \ y,\ z>0)$

이 방정식의 정수해의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_{n-5}$이고, 이는 검은색으로 칠할 타일 3개를 고르는 경우의 수와 같습니다.

$\therefore\ f(n)={}_4\mathrm{H}_{n-5}$

(나) : 첫째 줄의 n개의 타일 중, 둘째 줄에 있는 2개의 검은 타일과 이어진 2개의 타일은 제외하고 검은색으로 색칠할 수 있으므로

첫째 줄에서 검은색으로 칠할 타일 1개를 고르는 경우의 수는 $n-2$입니다.

$\therefore\ g(n)=n-2$

$\therefore\ f(10)+g(8)={}_4\mathrm{H}_5+6={}_8\mathrm{C}_3+6=62$

정답: ③

Problem #21

21. 구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt \quad (0\le x\le 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x)=f(x)-x$

(나) $\int_0^1 F(x)dx=e-\frac{5}{2}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $F(1)=e$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)dx=\frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2dx=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution

ㄱ) $F'(x)=f(x)$에서

$$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 \{f(x)-x\}dx$$

$$=F(1)-F(0)-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}$$

$F(0)=0$이므로 $F(1)=e-2$

(거짓)

ㄴ) $\int_0^1 xF(x)dx$

$$=\int_0^1 \{xf(x)-x^2\}dx$$

$$=[xF(x)]_0^1-\int_0^1 F(x)dx-\frac{1}{3}\ \text{(부분적분 이용)}$$

$$=F(1)-\left(e-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ (\because\ ㄱ)$$

(참)

ㄷ) $\int_0^1 \{F(x)\}^2dx$

$$=\int_0^1 F(x)\cdot F(x)dx$$

$$=\int_0^1 [F(x)\{f(x)-x\}]dx$$

$$=\int_0^1 F(x)f(x)dx-\int_0^1 xF(x)dx$$

ㄴ에서 $\int_0^1 xF(x)dx=\frac{1}{6}$이고,

부분적분법에 의하여

$$\int_0^1 F(x)f(x)dx=[\{F(x)\}^2]_0^1-\int_0^1 F(x)f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 F(x)f(x)dx=\frac{1}{2}(e-2)^2=\frac{1}{2}e^2-2e+2$$

$$\therefore\ \int_0^1 \{F(x)\}^2dx=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$$

(참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ입니다.

정답: ④

※ $F(x)-f(x)=-x$의 양변에 e^{-x}를 곱하면

$e^{-x}F(x)-e^{-x}f(x)=-xe^{-x}$

$\Rightarrow\ \{e^{-x}F(x)\}'=xe^{-x}$

$\therefore\ e^{-x}F(x)=\int xe^{-x}=-e^{-x}(x+1)+C$

양변에 $x=0$을 대입하여 정리하면 $C=1$을 얻습니다.

$\therefore\ F(x)=e^x-x-1$

이는 조건 (나)도 만족함을 계산을 통해 알 수 있습니다. 이렇게 구한 $F(x)$를 대입해도 똑같은 답을 얻을 수 있습니다.

Problem #26

26. 다음 조건을 만족시키는 네 자연수 a, b, c, d로 이루어진 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=6$
(나) $a\times b\times c\times d$는 4의 배수이다.

Solution

a, b, c, d는 자연수이므로 (가)에 의하여

$1 \le a, b, c, d < 4$입니다. (i)

(i)과 (나) 조건에 의하여 a, b, c, d 중 적어도 두 수는 2여야 합니다. (ii)

(ii)와 (가) 조건을 만족하는 경우는

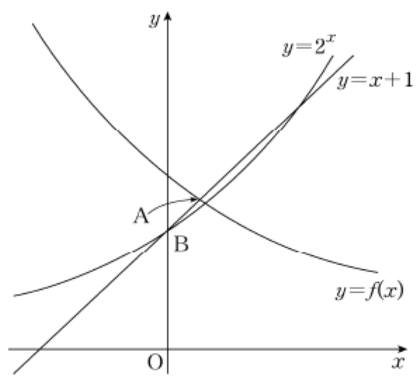
a, b, c, d 중 2개는 1이고, 남은 2개는 2인 경우 뿐이라는 것을 쉽게 알 수 있습니다.

따라서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 4개 중 2개를 고르는 방법의 수와 같습니다. $\Rightarrow {}_4C_2 = 6$(개)

정답: 6

Problem #27

27. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$을 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$이 만나는 점 A와 점 B(0, 1) 사이의 거리를 k라 할 때, $\frac{1}{k^2}$의 값을 구하시오. [4점]



Solution

곡선 $y=f(x)$를 x축 방향, y축 방향으로 각각 $-\frac{1}{4}$만큼 평행이동하고, y축에 대하여 대칭이동한 곡선은 $y=2^x$가 된다는 사실을 이용합니다.

위와 같이 $y=f(x)$를 $y=2^x$로 대응시키는

변환 $T:(x, y)\rightarrow\left(-x+\frac{1}{4},\ y-\frac{1}{4}\right)$에 의하여

$y=x+1$은 $y=-x+1$로 이동하는데,

$y=2^x$와 $y=-x+1$의 교점을 A′이라 하면

자명히 A′의 좌표는 $(0, 1)$입니다.

변환 T에 의하여 점 B는 $\mathrm{B}'\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$으로 이동하고,

T는 대칭이동과 평행이동의 합성으로만 이루어진 변환이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{A'B'}}$입니다.

$\therefore\ k=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{8}}\ \Rightarrow\ \frac{1}{k^2}=8$

정답: 8

Problem #28

28. 연속함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

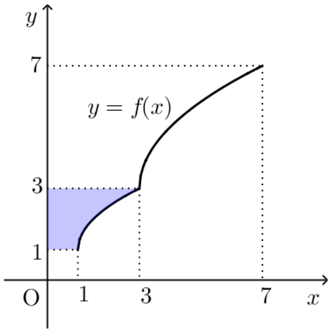
(가) $f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(7)=7$
(나) $x\neq3$인 모든 실수 x에 대하여 $f''(x)<0$이다.
(다) $\int_1^7 f(x)dx=27,\ \int_1^3 g(x)dx=3$

$12\int_3^7 |f(x)-x|\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

Solution

문제의 조건에서 $y=f(x)$는 $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(7, 7)$을 지나고, 역함수가 존재하므로 증가함수이고, $x=3$을 제외한 모든 구간에서 위로 볼록한 곡선임을 알 수 있습니다.

아래는 구간 $[1, 7]$에서 $y=f(x)$의 그래프로 가능한 곡선 중 하나입니다.



위 그림에서 색칠된 부분의 넓이가 $\int_1^3 g(x)dx=3$이므로

$$\int_1^3 f(x)dx=3^2-1^2-\int_1^3 g(x)dx=5$$

$$\therefore \int_3^7 f(x)dx=\int_1^7 f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx=22$$

한편 구간 $(3,\ 7)$에서 $f(x)>x$이므로

※ 평균값 정리에 의하여 $f'(c)=1$인 c가 구간 $(3,\ 7)$에 존재하고, $f''(x)<0$이므로 $f'(3)>1$ **(1)**
한편, 구간 $(3,\ 7)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)>x$가 아니라고 하면,
(1)에서 구간 $(3,\ 7)$에 속하는 적당한 두 실수 $a,\ b$ $(a<b)$가 존재하여 $f(a)>a,\ f(b)<b$
사이값 정리에 의하여 $f(k)=k$인 k가 구간 $(a,\ b)$에 존재하고,
평균값 정리에 의하여 $f'(c_1)=1$인 c_1이 구간 $(3,\ k)$에, $f'(c_2)=1$인 c_2가 구간 $(k,\ 7)$에 존재합니다.
$c_1<c_2$이므로 위 사실은 $f''(x)<0$이라는 사실에 모순입니다.
따라서 구간 $(3,\ 7)$에서 항상 $f(x)>x$입니다.

$$\therefore\ 12\int_3^7 |f(x)-x|dx$$

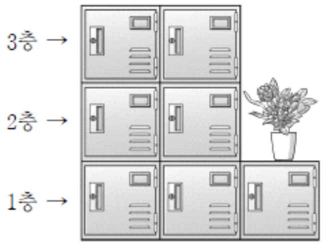
$$=12\int_3^7 \{f(x)-x\}dx$$

$$=12\left(\int_3^7 f(x)dx-\int_3^7 xdx\right)=264-240=24$$

정답: 24

Problem #29

29. 그림과 같은 7개의 사물함 중 5개의 사물함을 남학생 3명과 여학생 2명에게 각각 1개씩 배정하려고 한다. 같은 층에서는 남학생의 사물함과 여학생의 사물함이 서로 이웃하지 않는다. 사물함을 배정하는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]



Solution

여학생을 먼저 배치하고 그 다음 남는 자리에 남학생을 배치하도록 합니다.

1) 여학생 사물함이 1층에 2개 있는 경우
여학생에게 사물함을 배정하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2=6$
남학생은 2, 3층의 사물함을 자유롭게 사용할 수 있으므로
남학생에게 사물함을 배정하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{P}_3=24$
따라서 이 경우 사물함을 배정하는 방법의 수는
$24\times 6=144$

2) 여학생 사물함이 2층에 2개 있는 경우
여학생에게 사물함을 배정하는 방법의 수는 ${}_2\mathrm{P}_1=2$
남학생은 1, 3층의 사물함을 자유롭게 사용할 수 있으므로
남학생에게 사물함을 배정하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$
따라서 이 경우 사물함을 배정하는 방법의 수는
$2\times 60=120$

3) 여학생 사물함이 3층에 2개 있는 경우 ⇒ 2)와 동일

4) 여학생 사물함이 1층, 2층에 각각 1개씩 있는 경우
1층에 남학생의 사물함도 있어야 하므로
1층에 있는 여학생 사물함은 중간에 올 수 없습니다.
따라서 여학생의 사물함을 배정하는 방법의 수는
$2\times 2\times 2=8$

남학생의 경우 3층의 사물함 2개와 1층의 여학생 사물함 반대쪽 끝에 있는 사물함 1개를 배정할 수 있으므로

남학생에게 사물함을 배정하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3 = 6$

따라서 이 경우 사물함을 배정하는 방법의 수는

$8 \times 6 = 48$

5) 여학생 사물함이 1층, 3층에 각각 1개씩 있는 경우

$\Rightarrow$ 4)와 동일

6) 여학생 사물함이 2층, 3층에 각각 1개씩 있는 경우

여학생에게 사물함을 배정하는 방법의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$

남학생에게 사물함을 배정하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{P}_3 = 6$

따라서 이 경우 사물함을 배정하는 방법의 수는

$8 \times 6 = 48$

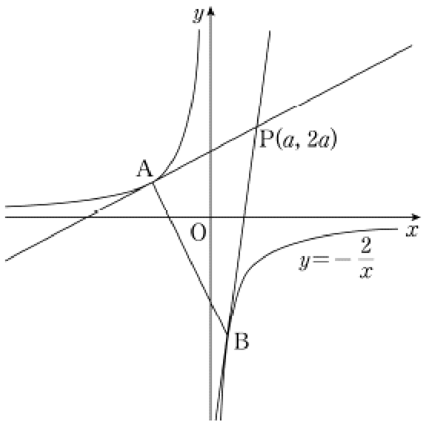
1) ~ 6) 에서 사물함을 배정하는 모든 경우의 수는

$144 + 240 + 96 + 48 = 528$

정답: 528

Problem #30

30. 그림과 같이 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(a, 2a)$에서 곡선 $y = -\dfrac{2}{x}$에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2$의 최솟값을 구하시오. [4점]



Solution

$\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{2}{x}\right) = \dfrac{2}{x^2}$에서, 곡선 $y = -\dfrac{2}{x}$위의 점

$\left(t, -\dfrac{2}{t}\right)$에서 그은 접선의 방정식은

$y = \dfrac{2}{t^2}(x-t) - \dfrac{2}{t}$

이 직선이 $(a, 2a)$를 지나므로

$2a = \dfrac{2}{t^2}(a-t) - \dfrac{2}{t}$

$\Rightarrow a = \dfrac{a}{t^2} - \dfrac{2}{t} \Rightarrow at^2 + 2t - a = 0$

$\mathrm{A}\left(m, -\dfrac{2}{m}\right)$, $\mathrm{B}\left(n, -\dfrac{2}{n}\right)$ $(m < 0 < n)$이라 두면

근과 계수의 관계에 의하여

$m + n = -\dfrac{2}{a}, \ mn = -1, \ m^2 + n^2 = \dfrac{4}{a^2} + 2 \quad \cdots (1)$

$\therefore \ \overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2$

$= (a-m)^2 + \left(2a + \dfrac{2}{m}\right)^2 + (a-n)^2 + \left(2a + \dfrac{2}{n}\right)^2$

$+ (m-n)^2 + \left(\dfrac{2}{m} - \dfrac{2}{n}\right)^2$

$= 10a^2 - 2(m+n)a + 8\left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)a$

$+ 2(m^2+n^2) + 8\left(\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{1}{n^2}\right) - 2mn - \dfrac{8}{mn}$

$= 10a^2 + \dfrac{40}{a^2} + 50 \ [\ \because (1)\ ]$

$\geq 2\sqrt{10a^2 \times \dfrac{40}{a^2}} + 50 = 90$ (산술-기하 평균 부등식 이용)

(등호는 $10a^2 = \dfrac{40}{a^2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$일 때 성립)

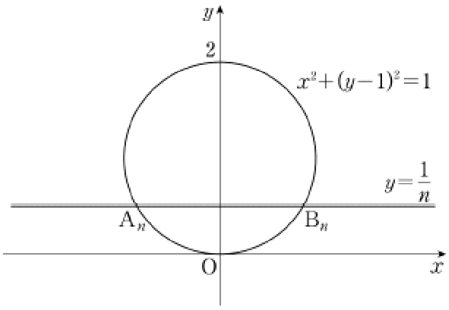
따라서 구하는 식의 최솟값은 90입니다.

정답: 90

'나' 형

Problem #14

14. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=\frac{1}{n}$과 원 $x^2+(y-1)^2=1$의 두 교점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 A_nB_n의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} n(l_n)^2$의 값은? [4점]



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Solution

$B_n\left(x_n,\ \frac{1}{n}\right)$이라 하면

점 A_n과 B_n은 y축에 대하여 대칭이므로

$l_n = 2x_n \Rightarrow (l_n)^2 = 4x_n^2$

원의 방정식에 $x = x_n$, $y = \frac{1}{n}$을 대입하면

$x_n^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow x_n^2 = 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} n(l_n)^2 = \lim_{n\to\infty} 4nx_n^2$

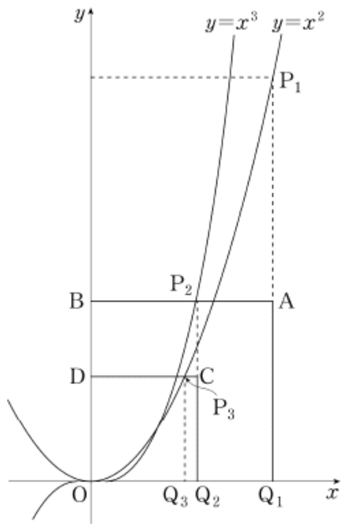
$= \lim_{n\to\infty}\left(8-\frac{4}{n}\right)$

$= 8$

정답: ④

Problem #15

15. 그림과 같이 좌표평면에 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $P_1(a, f(a))$ $(a>1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_1이라 하자. 선분 OQ_1을 한 변으로 하는 정사각형 OQ_1AB의 한 변 AB가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 P_2, 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_2라 하자. 선분 OQ_2를 한 변으로 하는 정사각형 OQ_2CD의 한 변 CD가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 P_3, 점 P_3에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_3이라 하자. 두 점 Q_2, Q_3의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $bc=2$가 되도록 하는 점 P_1의 y좌표의 값은? (단, O는 원점이고, 두 점 A, C는 제1사분면에 있다.) [4점]



① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

Solution

그림의 각 점의 좌표를 하나씩 나타내봅니다.

$P_1(t,\ t^2)$이라 두면

$Q_1(t,\ 0)$, $\overline{AQ_1} = \overline{AB}$에서 $A(t,\ t)$

점 P_2와 A의 y좌표는 서로 같고, P_2는 $y=x^3$ 위의

점이므로 $P_2(\sqrt[3]{t},\ t) \Rightarrow b = \sqrt[3]{t}$

같은 방법으로 $C(\sqrt[3]{t},\ \sqrt[3]{t})$이고

점 P_3와 C의 y좌표는 서로 같고 P_3는 $y=x^2$ 위의

점이므로 $P_3(\sqrt[6]{t},\ \sqrt[3]{t}) \Rightarrow c = \sqrt[6]{t}$

$bc = \sqrt[3]{t}\,\sqrt[6]{t} = t^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = t^{\frac{1}{2}} = 2$

$\therefore\ t = 4$

따라서 P_1의 y좌표는 $t^2=16$입니다.

정답: ⑤

Problem #16

16. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\frac{6x+12}{2x-1},$$

$$g(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 정수인 경우})\\ 0 & (x\text{가 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$

일 때, 방정식 $(g\circ f)(x)=1$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

Solution

함수 $g(x)$의 정의에 의하여

$(g\circ f)(x)=1 \Leftrightarrow f(x)\in\mathbb{Z}$

$$f(x)=\frac{6x+12}{2x-1}$$

$$=\frac{6x-3+15}{2x-1}=3+\frac{15}{2x-1}\text{에서}$$

$f(x)$가 정수이려면 $\dfrac{15}{2x-1}$이 정수여야 합니다.

즉, $2x-1$이 15의 약수여야 합니다.

15의 양의 약수는 1, 3, 5, 15이고,

이는 모두 홀수이므로 자연수 x에 대하여 항상 $2x-1$의 꼴로 나타낼 수 있습니다.

따라서 $(g\circ f)(x)=1$를 만족하는 모든 자연수 x의 개수는 4입니다.

정답: ①

Problem #17

17. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\ge 0)\\ 4x & (x<0)\end{cases}$$

의 역함수 $g(x)$에 대하여 부등식 $g(x)\le -\frac{1}{4}x^2+3$의 해가 $a\le x\le b$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

Solution

$y=\sqrt{2x}\ (x\ge 0,\ y\ge 0)$의 역함수는

$x=\sqrt{2y} \Rightarrow y=\frac{1}{2}x^2\ (x\ge 0)$이고,

$y=4x\ (x<0,\ y<0)$의 역함수는

$x=4y \Rightarrow y=\frac{1}{4}x\ (x<0)$이므로

$$\therefore\ g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2 & (x\ge 0)\\ \frac{1}{4}x & (x<0)\end{cases}$$

따라서 부등식 $g(x)\le -\frac{1}{4}x^2+3$은 아래와 동치입니다.

$i)$ $x\ge 0$일 때

$\frac{1}{2}x^2\le -\frac{1}{4}x^2+3 \Rightarrow x^2-4\le 0 \Rightarrow -2\le x\le 2$

$\therefore\ 0\le x\le 2$

$ii)$ $x<0$일 때

$\frac{1}{4}x\le -\frac{1}{4}x^2+3 \Rightarrow x^2+x-12\le 0$

$\Rightarrow\ -4\le x\le 3$

$\therefore\ -4\le x<0$

$i)$, $ii)$에서 $g(x)\le -\frac{1}{4}x^2+3$의 해는

$-4\le x\le 2$입니다. $\therefore\ a+b=-2$

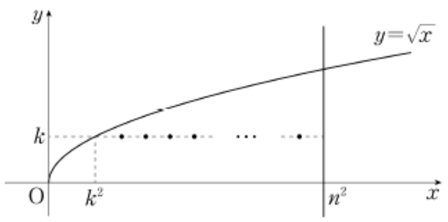
정답: ①

Problem #18

18. 다음은 2 이상의 자연수 n에 대하여 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프와 x축 및 직선 $x=n^2$으로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n을 구하는 과정이다.

> $n=2$일 때, 곡선 $y=\sqrt{x}$, x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서
> x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은
> $(2,1)$, $(3,1)$이므로
> $a_2=\boxed{(가)}$
> 이다.

3 이상의 자연수 n에 대하여 a_n을 구하여 보자.



위의 그림과 같이 $1 \le k \le n-1$인 정수 k에 대하여 주어진 도형의 내부에 있는 점 중에서 x좌표가 정수이고, y좌표가 k인 점은

$(k^2+1,\ k),\ (k^2+2,\ k),\ \cdots,\ (\boxed{\text{(나)}},\ k)$

이므로 이 점의 개수를 b_k라 하면

$b_k = \boxed{\text{(나)}} - k^2$

이다. 따라서

$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \boxed{\text{(다)}}$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+f(4)+g(6)$의 값은? [4점]

① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

Solution

(가) : 바로 위에 쓰여 있듯이, $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$의 두 점 뿐입니다. $\Rightarrow a_2 = 2$

$\therefore\ p = 2$

(나) : x좌표가 n^2보다 작아야하므로 x좌표가 제일 크고, y좌표가 k인 점의 좌표는 $(n^2-1,\ k)$입니다.

$\therefore\ f(n) = n^2 - 1$

(다) : $\sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2 - 1)$

$= n^2(n-1) - \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} - (n-1)$

$= \dfrac{(n-1)(4n^2+n-6)}{6}$

$\therefore\ g(n) = \dfrac{(n-1)(4n^2+n-6)}{6}$

$\therefore\ p + f(4) + g(6) = 2 + 15 + 120 = 137$

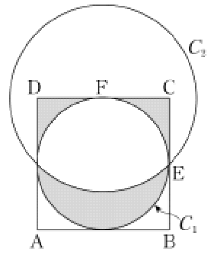
정답: ④

Problem #19

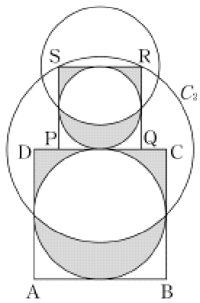
19. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 이 정사각형에 내접하는 원을 C_1이라 하자. 원 C_1이 변 BC, CD와 접하는 점을 각각 E, F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 E를 지나는 원을 C_2라 하자. 원 C_1의 내부와 원 C_2의 외부의 공통부분인 모양의 도형과, 원 C_1의 외부와 원 C_2의 내부 및 정사각형 ABCD의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 두 꼭짓점이 변 CD 위에 있고 나머지 두 꼭짓점이 정사각형 ABCD의 외부에 있으면서 원 C_2 위에 있는 정사각형 PQRS를 그리고, 이 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양과 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

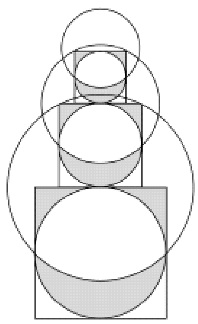
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2

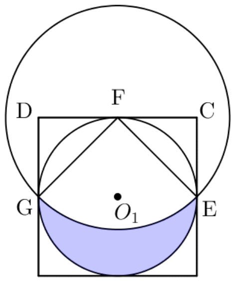


…

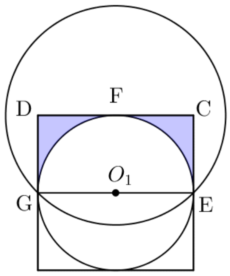
R_3 …

① $\dfrac{26-5\pi}{6}$ ② $\dfrac{28-5\pi}{6}$ ③ $\dfrac{30-5\pi}{6}$ ④ $\dfrac{32-5\pi}{6}$ ⑤ $\dfrac{34-5\pi}{6}$

Solution



<그림 1>



<그림 2>

<그림 1>에서 색칠된 부분의 넓이는

(반원 O_1의 넓이)+$\triangle$EFG−(부채꼴 EFG의 넓이)와

같으므로 $\frac{1}{2}\pi+1-\frac{\pi}{4}(\sqrt{2})^2=1$

<그림 2>에서 색칠된 부분의 넓이는

(직사각형 CDGE의 넓이)−(반원 O_1의 넓이)와

같으므로 $2-\frac{\pi}{2}$

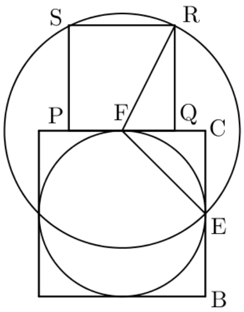
$\therefore\ S_1=1+\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=3-\frac{\pi}{2}$

<그림 3>에서

$\overline{\mathrm{FR}}=\overline{\mathrm{FE}}=\sqrt{2}$이고,

$2\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{RQ}}$이므로 피타고라스

정리에 의하여 $\therefore\ \overline{\mathrm{RQ}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$



<그림 3>

한편 $\frac{S_2-S_1}{S_1}=\left(\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{BC}}}\right)^2=\frac{2}{5}$이므로

등비급수 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3-\frac{\pi}{2}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{30-5\pi}{6}$$

정답: ③

Problem #20

20. 실수 x에 대한 두 조건

$p:\ x^2-x-6<0,$

$q:\ x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8\geq 0$

이 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재할 때, 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

Solution

두 조건 $p,\ q$의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하면

$p:\ x^2-x-6<0 \Leftrightarrow -2<x<3$

$\Rightarrow\ P=\{x\,|\,-2<x<3\}$

$q:\ x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8\geq 0$

$\Leftrightarrow\ x^2+(6-3a)x+(a-4)(2a-2)\geq 0$

$\Leftrightarrow\ (x-a+4)(x-2a+2)\geq 0$

따라서 집합 Q는 a값의 범위에 따라 달라집니다.

$i)$ $a-4\geq 2a-2 \Rightarrow a\leq -2$인 경우

$q:\ x\geq a-4$ or $x\leq 2a-2$이고,

$a\leq -2$이면 $a-4<-2$이므로

이 경우 $P\cap Q=\{x\,|\,-2<x<3\}$

따라서 정수 x가 항상 2개 이상 존재합니다.

$ii)$ $a-4<2a-2 \Rightarrow a>-2$인 경우

$q:\ x\leq a-4$ or $x\geq 2a-2$이고,

$P\cap Q$에 속하는 정수가 단 하나 존재하려면

$p:\ -2<x<3$에서

$-2<x\leq a-4$인 경우와 $2a-2\leq x<3$인 경우를

생각합니다.

$ii-1)$ $a-4=-1 \Rightarrow a=3$인 경우

$q:\ x\leq -1$ or $x\geq 4$이므로

$P\cap Q=\{x\,|\,-2<x\leq -1\}$이므로 문제의 조건을 만족합니다.

$ii-2)$ $2a-2=2 \Rightarrow a=2$인 경우

$q:\ x\leq -2$ or $x\geq 2$이므로

$P\cap Q=\{x\,|\,2\leq x<3\}$이므로 문제의 조건을 만족합니다.

$i),\ ii)$에서, 문제의 조건을 만족하는 a의 값의 합은

$2+3=5$입니다.

정답: ②

Problem #21

21. 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m = \left\{(a,\ b)\ \middle|\ 2^a = \frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $A_4 = \{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m = 2^k$이면 $n(A_m) = k$이다.

ㄷ. $n(A_m) = 1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution

ㄱ) $m = 4$에서 $2^a = \dfrac{4}{b}$이고,

2^a, b는 자연수이므로 b는 4의 약수이고

가능한 경우는 $(a,\ b) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$ 뿐입니다.

(참)

ㄴ) $m = 2^k$이면 $2^a = \dfrac{2^k}{b}$이고,

a는 자연수, b는 2^k의 약수이므로

$b = 1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{k-1}$가 가능합니다.

이 경우 항상 $\dfrac{m}{b} = 2^N$ (N은 자연수) 형태로 표현되므로

각 b의 값 따라 적당한 자연수 a가 항상 존재합니다.

가능한 b의 개수는 k개이므로 $\therefore\ n(A_m) = k$

(참)

ㄷ) $n(A_m) = 1$이려면 방정식 $2^a = \dfrac{m}{b}$을 만족하는

자연수 $a = 1$로 유일해야 합니다.

$a \geq 2$인 경우, $2^a = \dfrac{m}{b} \Leftrightarrow 2^{a-1} = \dfrac{m}{2b}$이므로

$(a-1,\ 2b)$도 주어진 방정식을 만족하기 때문입니다.

또한, b가 짝수인 경우 $(a,\ b) \in A_m \Rightarrow (a+1,\ \dfrac{b}{2}) \in A_m$

이므로 b는 반드시 홀수여야 합니다.

따라서 $n(A_m) = 1 \Leftrightarrow m = 2(2k-1)$($k$는 자연수)이므로

두 자리 자연수 m의 개수는

$10 \leq 4k-2 < 100$인 자연수 k의 개수와 같고,

$\Rightarrow 3 \leq k \leq 25$에서 자연수 k의 개수는 23입니다.

(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ입니다.

정답: ⑤

Problem #26

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Solution

수열 $\{a_n\}$은 첫째 항이 3, 공비가 $\dfrac{2}{3}$인 등비수열이므로

$$a_n = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow a_{2n-1} = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} = 3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째 항이 3이고, 공비가 $\dfrac{4}{9}$인 등비수열입니다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{3}{1-\frac{4}{9}} = \frac{27}{5},\quad p+q = 32$$

정답: 32

Problem #27

27. 함수 $f(x) = x^2 + x - \dfrac{1}{3}$에 대하여 부등식

$$f(n) < k < f(n)+1\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시키는 정수 k의 값을 a_n이라 하자.

$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{a_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Solution

$f(n) < k < f(n)+1$

$\Leftrightarrow\ n^2+n-\frac{1}{3} < k < n^2+n+\frac{2}{3}$ 에서

k는 정수이므로 $\therefore\ k = n^2+n = a_n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2+n}$

$= \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$

$\therefore\ p+q = 201$

정답: 201

Problem #28

28. 어느 날 2개의 놀이 기구 A, B가 있는 놀이공원에 다녀온 30명의 학생을 대상으로 그날 어떤 놀이 기구를 이용했는지 조사하였더니 놀이 기구 A를 이용한 학생은 23명, 놀이 기구 B를 이용한 학생은 16명이었다. 놀이 기구 A, B를 모두 이용한 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. [4점]

Solution

놀이기구 A를 이용한 학생들의 집합을 A,

놀이기구 B를 이용한 학생들의 집합을 B라 합시다.

그러면 $n(A) = 23$, $n(B) = 16$이고

$23 \le n(A \cup B) \le 30$ (놀이기구를 이용하지 않는 학생이 있을 수도 있음에 주의합니다.)

$\Rightarrow\ 23 \le n(A) + n(B) - n(A \cap B) \le 30$

$\Rightarrow\ 23 \le 39 - n(A \cap B) \le 30$

$\therefore\ 9 \le n(A \cap B) \le 16,\quad M+m = 25$

정답: 25

Problem #29

29. 2 이상의 자연수 x에 대하여

$\log_x n$ (n은 $1 \le n \le 300$인 자연수)

가 자연수인 n의 개수를 $A(x)$라 하자. 예를 들어, $A(2) = 8$, $A(3) = 5$이다.

집합 $P = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 대응 f를

$f(x) = A(x)\ (x \in X)$

로 정의하면 어떤 대응 f는 함수가 된다. 함수 f가 일대일 대응이 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

Solution

$A(x)$는 $1 \le n = x^k \le 300$인

자연수 k의 개수와 같습니다. 이를 이용하여

$2 \le x \le 8$일 때 $A(x)$의 값을 구하면 아래와 같습니다.

x	2	3	4	5	6	7	8
$A(x)$	8	5	4	3	3	2	2

따라서 집합 P에서 P로의 대응 $x \to A(x)$은 함수가 됩니다.

함수 $f: X \to X$가 일대일 대응이므로

$f(8) = 2 \in X \Leftrightarrow f(2) = 8 \in X$

$f(5) = 3 \in X \Leftrightarrow f(3) = 5 \in X$

$4 \in X \Leftrightarrow f(4) = 4 \in X$

$6 \notin X,\ 7 \notin X$이어야 합니다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 X의 개수는

집합 $\{\{2, 8\}, \{3, 5\}, \{4\}\}$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같고, 그 개수는 $2^3 - 1 = 7$ 입니다.

정답: 7

Problem #30

30. 자연수 전체의 집합의 부분집합 X가 상수 p에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(X)=3$
(나) $x \in X$일 때,

x가 홀수이면 $\frac{x+p}{2} \in X$,

x가 짝수이면 $\frac{x}{2} \in X$이다.

$5 \in X$일 때, 모든 자연수 p의 값의 합을 구하시오. [4점]

Solution

(나) 조건에 의하여

$5 \in X$이면 $\frac{5+p}{2} \in X$입니다.

i) $\frac{5+p}{2}$가 홀수인 경우

$$\frac{\frac{5+p}{2}+p}{2}=\frac{5+3p}{4} \in X$$

$i-1$) $\frac{5+3p}{4}$가 홀수인 경우

$$\frac{\frac{5+3p}{4}+p}{2}=\frac{5+7p}{8} \in X\text{이고}$$

(가) 조건에 의하여 $\frac{5+7p}{8} \in \left\{5,\ \frac{5+p}{2},\ \frac{5+3p}{4}\right\}$

각 경우 모두 $p=5$를 얻을 수 있습니다.

그런데 $p=5$이면 $\frac{5+p}{2}=\frac{5+3p}{4}=\frac{5+7p}{8}=5$이므로

X에 속하는 5가 아닌 다른 서로 다른 두 자연수 $m,\ n$이 존재하여 (나) 조건을 만족할 수 있는지 확인하면 됩니다.

$\frac{m}{2}=5$라 두면 $m=10 \Rightarrow n=2m=20$

따라서 $X=\{5,\ 10,\ 20\}$, $p=5$으로 두면 문제의 두 조건을 만족하게 됩니다.

$i-2$) $\frac{5+3p}{4}$가 짝수인 경우

$$\frac{\frac{5+3p}{4}}{2}=\frac{5+3p}{8} \in X\text{이고}$$

(가) 조건에 의하여 $\frac{5+3p}{8} \in \left\{5,\ \frac{5+p}{2},\ \frac{5+3p}{4}\right\}$

이를 만족하는 자연수 p의 값은 존재하지 않습니다.

ii) $\frac{5+p}{2}$가 짝수인 경우

$$\frac{\frac{5+p}{2}}{2}=\frac{5+p}{4} \in X$$

$ii-1$) $\frac{5+p}{4}$가 홀수인 경우

$$\frac{\frac{5+p}{4}+p}{2}=\frac{5+5p}{8} \in X\text{이고}$$

(가) 조건에 의하여 $\frac{5+5p}{8} \in \left\{5,\ \frac{5+p}{2},\ \frac{5+p}{4}\right\}$

여기서 $p=7,\ 15$를 얻을 수 있습니다.

$p=7$인 경우 $\frac{5+p}{2}=6$(짝수), $\frac{5+p}{4}=3$(홀수)이므로 주어진 조건을 만족합니다.

$p=15$인 경우 $\frac{5+p}{2}=10$(짝수), $\frac{5+p}{4}=5$(홀수) 이므로 주어진 조건을 만족합니다.

$ii-2$) $\frac{5+p}{4}$가 짝수인 경우

$$\frac{\frac{5+p}{4}}{2}=\frac{5+p}{8} \in X\text{이고,}$$

(가) 조건에 의하여 $\frac{5+p}{8} \in \left\{5,\ \frac{5+p}{2},\ \frac{5+p}{4}\right\}$

여기서 $p=35$를 얻을 수 있습니다.

$p=35$인 경우 $\frac{5+p}{2}=20$(짝수), $\frac{5+p}{4}=10$(짝수) 이므로 주어진 조건을 만족합니다.

i), ii)에서 문제의 조건을 만족하는 모든 자연수 p의 값의 합은 $5+7+15+35=62$입니다.

정답: 62