기하와 벡터 학습 자료

-평행사변형을 이용한 벡터의 합-

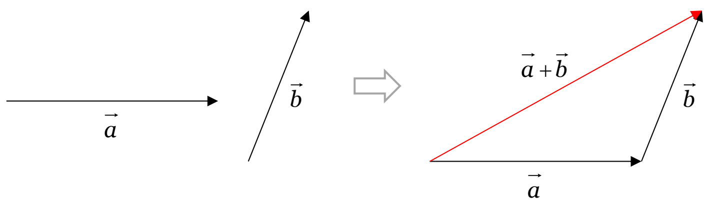
- 이 자료는 고등학교 내신/수능 대비용 수학 교재인 「박수칠 수학 기본서」를 홍보하기 위해 제작되었으며, 기하와 벡터의 「평행사변형을 이용한 벡터의 합」에 대한 개념과 예제가 포함되어 있습니다.
- 이 자료는 **「PDF 파일 원본 또는 그 인쇄물」**의 형태로 자유롭게 배포할 수 있습니다. 원본이 훼손된 경우, 특히 출처가 삭제되거나 변조된 경우에는 저작권법에 따라 강력하게 대응합니다.
- 「박수칠 수학 기본서」의 구입 또는 문의는 http://atom.ac/books/1504에서 할 수 있습니다.

벡터의 연산에는 덧셈, 뺄셈, 실수배, 내적, 외적이 있으며, 교육과정에서는 외적을 제외한 네 가지를 다루고 있다. 이 책에서는 벡터의 연산 다섯 가지를 모두 설명할 것이며, 먼저 덧셈과 뺄셈, 실수배에 대해 알아보도록 하자.

벡터의 덧셈

• 벡터의 합의 정의

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합은 기호 $\vec{\boldsymbol{a}}+\vec{\boldsymbol{b}}$로 표현되며, 다음과 같이 정의된다.

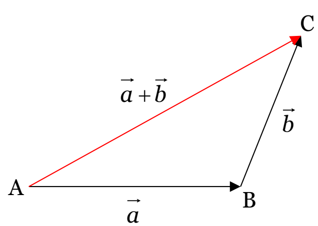


① 벡터를 평행이동해서 $\vec{a}$의 종점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

② 시점이 $\vec{a}$의 시점과 같고, 종점이 $\vec{b}$의 종점과 같은 새로운 벡터를 $\vec{a}+\vec{b}$로 정의한다.

오른쪽과 같이 세 점 A, B, C를 정하고 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$로 두면, $\vec{a}+\vec{b}$를 다음의 등식으로 표현할 수 있다.

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$



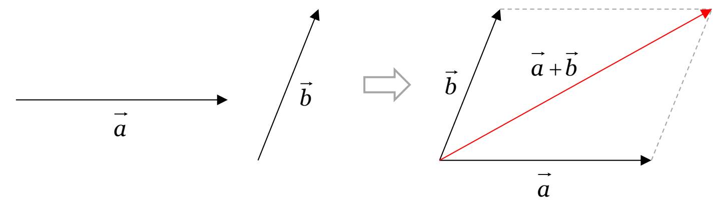
★ 시점과 종점으로 표현된 두 벡터의 합을 계산할 때는 오른쪽과 같은 특징을 이용하는 것이 좋다.

두 벡터의 합에서 안쪽의 두 점이 일치하면

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$$

바깥쪽의 두 점을 시점과 종점으로 하는 벡터가 된다.

★ 벡터의 합의 정의에서 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$는 삼각형 모양을 이룬다. 이와 달리 $\vec{a}$와 $\vec{b}$로 평행사변형 모양을 만들어서 벡터의 합 $\vec{a}+\vec{b}$를 정의할 수도 있는데 방법은 다음과 같다.

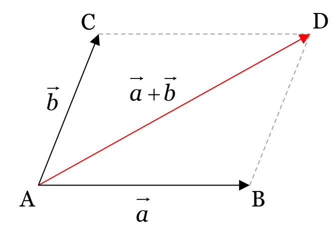


① 벡터를 평행이동해서 $\vec{a}$의 시점과 $\vec{b}$의 시점을 일치시킨다.

② $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 포함하는 평행사변형을 그린 다음 시점이 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 시점과 같고, 종점이 평행사변형의 새로운 꼭짓점인 벡터를 $\vec{a}+\vec{b}$로 정의한다.

오른쪽과 같이 세 점 A, B, C를 정해서 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$로 두고, 평행사변형의 새로운 꼭짓점을 D로 정하면, $\vec{a}+\vec{b}$를 다음의 등식으로 표현할 수 있다.

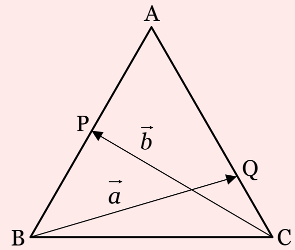
$$\overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{AC}}=\overrightarrow{\mathbf{AD}}$$



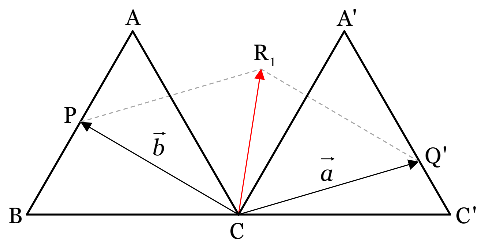
★ 물론 삼각형 모양을 만들든, 평행사변형 모양을 만들든 벡터의 합에는 차이가 없다.

예제1 오른쪽과 같은 정삼각형 ABC에서 점 P는 선분 AB 위를 움직이고, 점 Q는 선분 AC 위를 움직인다.

정삼각형 ABC의 한 변 길이가 2이고, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 $\vec{a}=\overrightarrow{BQ}$, $\vec{b}=\overrightarrow{CP}$로 둘 때, $|\vec{a}+\vec{b}|$의 최댓값을 구하시오.



풀이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합을 평행사변형으로 표현하기 위해 다음과 같이 정삼각형 ABC와 꼭짓점 C를 공유하고, 세 점 B, C, C'이 한 직선 위에 있도록 하는 정삼각형 A'CC'을 그린다. 이어서 선분 A'C' 위를 움직이는 점을 Q'으로 두고, 두 선분 CP, CQ'을 이웃한 변으로 하는 평행사변형 CQ'R_1P를 추가한다.

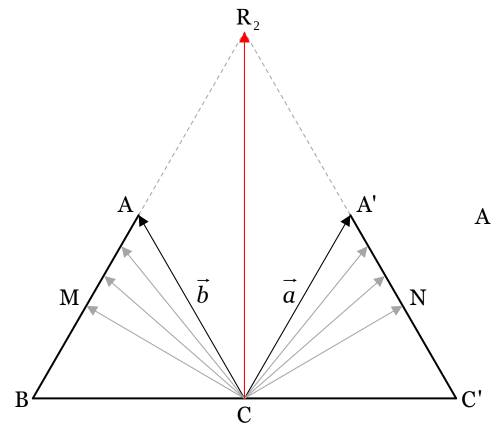


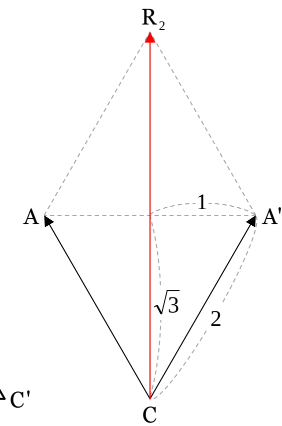
그러면

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CQ'}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CR_1}$$

이 되고, $|\vec{a}+\vec{b}|$가 최대이기 위해서는 $|\vec{a}|$와 $|\vec{b}|$가 가능한 크고, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 가능한 0에 가까워야 한다.

다음 그림과 같이 선분 AB, A'C'의 중점을 각각 M, N이라 할 때, $|\vec{a}|$의 최솟값은 선분 CN의 길이와 같고, $|\vec{b}|$의 최솟값은 CM의 길이와 같다. 그리고 점 Q'이 점 A'으로, 점 P가 점 A로 다가갈수록 $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$가 증가하고, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각이 감소하기 때문에 $|\vec{a}+\vec{b}|$가 증가한다.



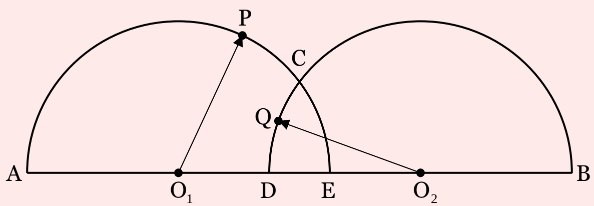


따라서 점 Q'이 점 A'에, 점 P가 점 A에 있을 때 $|\vec{a}+\vec{b}|$가 최대이며, 두 선분 CA, CA'을 이웃한 변으로 하는 평행사변형 CA'R_2A를 그리면 $|\vec{a}+\vec{b}|$의 최댓값이 선분 CR_2의 길이 $2\sqrt{3}$과 같음을 알 수 있다.

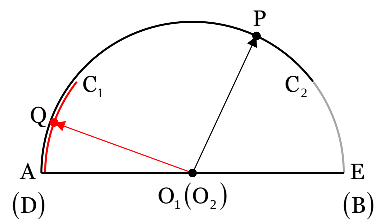
[2017학년도 수능 6월 모평 가형 #28]

예제2 그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AE}=\overline{DB}=2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=1$인 두 점을 O_1, O_2라 하자.

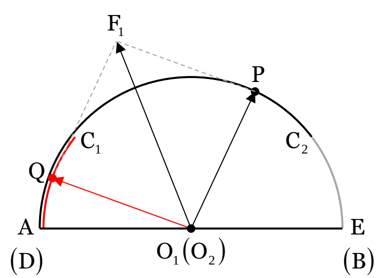
호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $1<\overline{O_1O_2}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



풀이 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 합을 평행사변형으로 구하기 위해 오른쪽과 같이 한 반원을 평행이동해서 중심 O_1, O_2가 일치하도록 한다. 이때, 호 AE 위의 점 C를 C_1로, 호 DB 위의 점 C를 C_2로 둬서 구분하자.



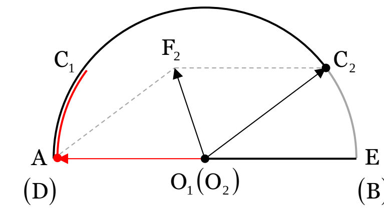
그러면 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1Q}$이고 점 P는 호 AC_2 위를, 점 Q는 호 AC_1 위를 움직인다. 또한 선분 O_1P, O_1Q를 이웃한 변으로 하는 평행사변형을 그린 다음, 새로 생긴 꼭짓점을 F_1로 두면



$\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1Q}=\overrightarrow{OF_1}$이 된다.

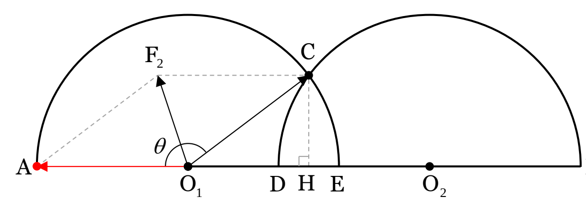
두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1Q}$의 크기가 일정하므로 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1Q}$의 크기가 최소이려면 $\overrightarrow{O_1P}$와 $\overrightarrow{O_1Q}$가 이루는 각이 π에 최대한 가까워야 한다. 이를 위해서는 오른쪽과 같이 점 P가 점 C_2에, 점 Q가 점 A에 위치하면 된다.

여기에 선분 O_1C_2, O_1A를 이웃한 변으로 하는 평행사변형을 추가하고, 새로 생긴 꼭짓점을 F_2로 두면 $\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1C_2}=\overrightarrow{OF_2}$가 된다. 따라서



$$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_1Q}\right|\geq\left|\overrightarrow{O_1C_2}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\left|\overrightarrow{OF_2}\right|=\frac{1}{2}$$

그럼 선분 AB의 길이를 구하기 위해 다음과 같이 문제에 주어진 그림에 세 벡터 $\overrightarrow{O_1C_2}$, $\overrightarrow{O_1F_2}$, $\overrightarrow{O_1A}$를 추가하고, $\left|\overrightarrow{OF_2}\right|=\left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$과 $\overline{AE}=\overline{DB}=2$를 이용해보자.



두 벡터 $\overrightarrow{O_1C}$, $\overrightarrow{O_1A}$가 이루는 각의 크기를 θ로 두고, $\left|\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1A}\right|=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱해서 정리하면 다음과 같이 $\cos\theta$의 값이 나타난다.

$$\left|\overrightarrow{O_1C}\right|^2+\left|\overrightarrow{O_1A}\right|^2+2\overrightarrow{O_1C}\bullet\overrightarrow{O_1A}=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ 1^2+1^2+2\times1\times1\times\cos\theta=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\ \cos\theta=-\frac{7}{8}$$

이를 활용하기 위해 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H로 두면 삼각형 $\mathrm{CO_1H}$에서

$$\overline{\mathrm{O_1H}}=\overline{\mathrm{CO_1}}\times\cos(\pi-\theta)=1\times\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$$

이므로 선분 AB의 길이는 다음과 같다.

$$\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AH}}=2\times\left(\overline{\mathrm{AO_1}}+\overline{\mathrm{O_1H}}\right)=2\times\left(1+\frac{7}{8}\right)=\frac{15}{4}\ \Rightarrow\ p+q=19$$

★ 예제2 의 풀이에서는 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O_1C}}$, $\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}$가 이루는 각의 크기 θ를 구하기 위해 $\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1C}}+\overrightarrow{\mathrm{O_1A}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1F_2}}\right|$의 양변을 제곱해서 정리했으며, 이 과정을 일반화하면 다음과 같다.

두 벡터의 합·차와 두 벡터가 이루는 각

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 또는 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$가 성립할 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각 θ는 다음과 같이 표현된다.

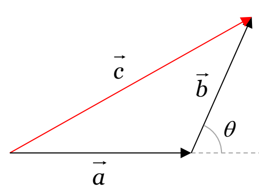
(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$가 성립할 때

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$의 양변을 제곱해서 정리하면

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{c}\right|^2$$

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\left|\vec{c}\right|^2$$

$$\cos\theta=-\frac{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2}{2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$



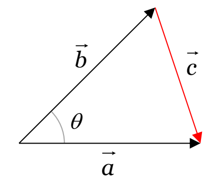
(2) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$가 성립할 때

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$의 양변을 제곱해서 정리하면

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}\bullet\vec{b}=\left|\vec{c}\right|^2$$

$$\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=\left|\vec{c}\right|^2$$

$$\cos\theta=\frac{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2}{2\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$



또한 과정 (2)를 이용하면 삼각형에서

▹ 두 변의 길이와 끼인 각의 크기가 주어질 때 나머지 한 변의 길이

▹ 세 변의 길이가 주어질 때 한 내각의 크기

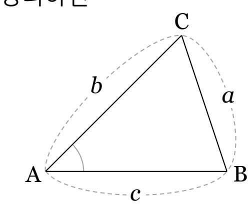
를 구하는데 필요한 코사인 제2법칙을 유도할 수 있다.

오른쪽과 같이 세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$이므로 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|$의 양변을 제곱해서 정리하면

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos\mathrm{A}=\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2$$

$$a^2=c^2+b^2-2cb\cos\mathrm{A}$$



이를 코사인 제2법칙이라 하며, 나머지 공식까지 나열하면 다음과 같다.

코사인 제2법칙

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC에 대하여

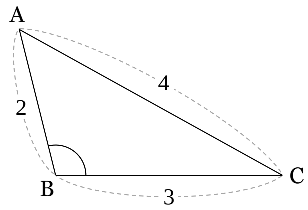
$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}}$$

$$\boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca\cos\mathrm{B}}$$

$$\boldsymbol{c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}}$$

a^2은 $(b-c)^2$의 전개식에서 bc항에 $\cos\mathrm{A}$를 곱한 것과 같다.

[예] 그림과 같이 세 변의 길이가 2, 3, 4 인 삼각형 ABC에서 $\cos B$의 값을 코사인 제2법칙으로 구하면 다음과 같다.



$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$4^2 = 2^2 + 3^2 - 2\times 2\times 3\times \cos B$$
$$\cos B = -\frac{1}{4}$$

그럼 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 또는 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$가 성립할 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각 θ에 대한 관계식을 이용하는 문제를 하나 더 풀어보자.

[2013학년도 수능 9월 모평 가형 #29]

예제3 좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left|\overrightarrow{A_0A_2}\right| = \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = 2$

(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\left(\overrightarrow{A_0A_k} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right) = \cos\frac{3-k}{3}\pi \ (k=1,\ 2,\ 3)$

$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

풀이 조건 (나)를 파악하기 위해 $k=1$, 2, 3을 차례로 대입해서 정리하면

① $k=1$일 때, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\left(\overrightarrow{A_0A_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{A_0A_3}\bullet\overrightarrow{A_0A_1} - \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right|^2 = -1$

② $k=2$일 때, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\left(\overrightarrow{A_0A_2}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{A_0A_3}\bullet\overrightarrow{A_0A_2} - \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right|^2 = 1$

③ $k=3$일 때, $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\left(\overrightarrow{A_0A_3}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right) = 1 \Rightarrow \left|\overrightarrow{A_0A_3}\right|^2 = 4 \Rightarrow \left|\overrightarrow{A_0A_3}\right| = 2$

가 되고, ③의 결과를 ①, ②에 대입하면 다음과 같다.

④ 위의 ③을 ①에 대입하면 $\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\overrightarrow{A_0A_1} = 1$

⑤ 위의 ③을 ②에 대입하면 $\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\overrightarrow{A_0A_2} = 3$

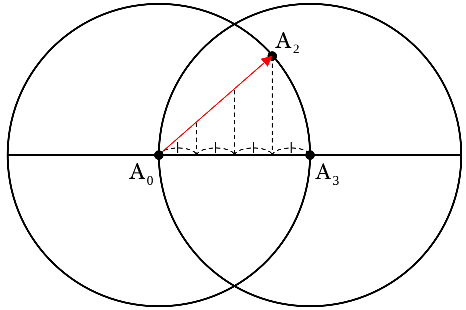
다음으로 조건 (가)의 $\left|\overrightarrow{A_0A_2}\right| = 2$, ③의 $\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right| = 2$, ⑤의 $\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\overrightarrow{A_0A_2} = 3$에 의해 두 벡터 $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$이 이루는 각을 α로 두면

$$\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\overrightarrow{A_0A_2} = \left|\overrightarrow{A_0A_2}\right|\times\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right|\times\cos\alpha = 2\times 2\times\cos\alpha = 3 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4}$$

이 성립한다.

그럼 지금까지 알아낸 것을 도형으로 표현해보자.

③으로부터 $\left|\overrightarrow{A_0A_3}\right| = 2$이므로 길이가 2인 선분 A_0A_3을 그린다. 그리고 (가)로부터 $\left|\overrightarrow{A_0A_2}\right| = \left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = 2$이므로 점 A_2는 점 A_0을 중심으로 하면서 반지름이 2인 원 위에 있을 수 있고, 점 A_1은 점 A_3을 중심으로 하고 반지름이 2인 원 위에 있을 수 있다. 선분 A_0A_3에 두 원을 추가한 다음, $\cos\alpha = \cos\angle A_2A_0A_3 = \frac{3}{4}$이 성립하도록 중심이 점 A_0인 원 위에 점 A_2를 표시한다. (아래 그림과 같이 점 A_2를 선분 A_0A_3의 위쪽에 찍어도 되고, 선분 A_0A_3의 아래쪽에 찍어도 된다.)

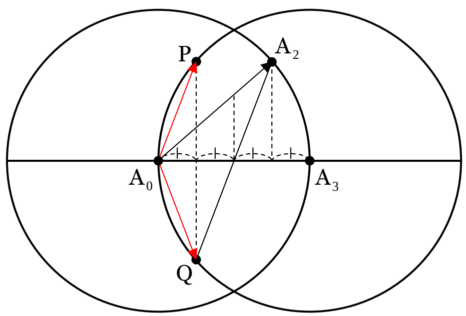


또한 ④로부터 $\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\overrightarrow{A_0A_1} = 1$이므로 두 벡터 $\overrightarrow{A_0A_1}$과 $\overrightarrow{A_0A_3}$이 이루는

각을 β로 두면 β는 예각이고,

$$\overrightarrow{A_0A_3}\bullet\overrightarrow{A_0A_1}=2\times\left|\overrightarrow{A_0A_1}\right|\times\cos\beta=1 \Rightarrow \left|\overrightarrow{A_0A_1}\right|\times\cos\beta=\frac{1}{2}$$

에 의해 $\overrightarrow{A_0A_1}$의 $\overrightarrow{A_0A_3}$ 위로의 정사영 길이는 $\frac{1}{2}$이 된다. 따라서 점 A_1은 아래 그림의 점 P 또는 점 Q에 존재할 수 있으며, 두 점 중에서 $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$를 최대로 하는 점 A_1의 위치는 점 Q이다.



그러므로 $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$의 최댓값은 $\left|\overrightarrow{QA_2}\right|$이고 다음과 같이 계산할 수 있다.

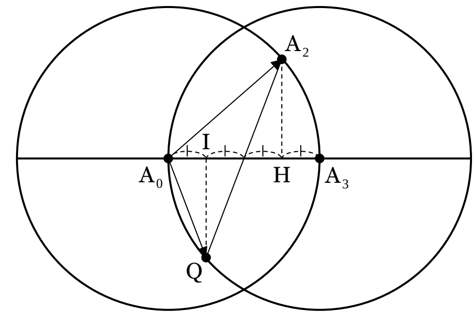
$$\left|\overrightarrow{QA_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{A_0A_2}-\overrightarrow{A_0Q}\right|^2=\left|\overrightarrow{A_0A_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{A_0Q}\right|^2-2\,\overrightarrow{A_0A_2}\bullet\overrightarrow{A_0Q}$$

$$=2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\alpha+\beta\right)=8=M^2$$

참고로 $\left|\overrightarrow{QA_2}\right|=\overline{QA_2}$를 코사인 제2법칙으로 계산하면 다음과 같다.

$$\overline{QA_2}^2=\overline{A_0A_2}^2+\overline{A_0Q}^2-2\times\overline{A_0A_2}\times\overline{A_0Q}$$

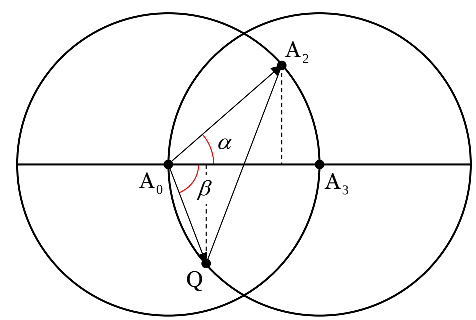
$$=2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2-2\times2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\alpha+\beta\right)=8=M^2$$



$$\because \overline{QI}^2=\overline{A_2H}^2=\left|\overrightarrow{A_0A_2}\right|^2-\overline{A_0H}^2=2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{4}$$

$$\left|\overrightarrow{A_0Q}\right|^2=\overline{A_0I}^2+\overline{QI}^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=2$$

$$\left|\overrightarrow{A_0Q}\right|=\sqrt{2}$$



$$\because \cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$