

110615

[4월]

NTJ

FOR
2017

출제 및 검토 : 110615

2016년 7월 메가스터디 현우진T 문항공모 동상 수상

5지선다형

1. 최고차항의 계수가 1이고 극댓값이 -1 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [4점]

(가) $f'(0) = -1$

(나) 방정식 $f'(|x|) = f(1)$ 은 오직 한 실근을 갖는다.

- ① 15 ② 19 ③ 23 ④ 27 ⑤ 31

2. 최고차항의 계수와 극댓값이 1인 삼차함수 $f(x)$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선이 곡선 $y = x^2 - 7$ 에 접할 때, $f(2)$ 의 값은? (단, $f(0)$ 의 값은 정수이다.) [4점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

3. 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 을

$$a_n = ((n+1)^{n+5} \text{를 } (n+1)^3 - 1 \text{로 나눈 나머지})$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{16} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 639 ② 640 ③ 641 ④ 642 ⑤ 643

4. 삼차함수 $f(x)$ 와 실수 t 에 대하여 함수 $||f(x)|-t|$ 의 미분가능하지 않은 모든 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은? [4점]

(가) $f'(x) = 3x(x-2)$

(나) $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) - \lim_{t \rightarrow 3^+} g(t) > 2$, $\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} g(t)$

(다) 방정식 $f(x) = x$ 의 모든 근은 정수이다.

- ① 49 ② 50 ③ 51 ④ 52 ⑤ 53

5. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$ 인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$ 의 값은?
 (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

- (가) $\lim_{x \rightarrow -3^+} [f'(x)] \times \lim_{x \rightarrow (-1+\sqrt{5})^+} [f'(x)] = -1$
 (나) $\lim_{x \rightarrow -3^-} [f'(x)] = \lim_{x \rightarrow (-1+\sqrt{5})^-} [f'(x)] = 0$
 (다) $x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 0이다.

- ① 23 ② 27 ③ 31 ④ 35 ⑤ 39

6. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는? [4점]

- (가) $2 \leq x+y+z+w \leq 7$
 (나) $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$

- ① 147 ② 148 ③ 149 ④ 150 ⑤ 151

7. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수가 80일 때, 정수 a 의 값은? [4점]

(가) $x+y+z+w=10$

(나) $||x-2|+a|\geq 2$

- ① -7 ② -5 ③ -3 ④ -1 ⑤ 1

8. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(-1)$ 의 값으로 가능한 모든 값의 합은? [4점]

(가) 최고차항의 계수는 1이다.

(나) $f'(1)=0$

(다) $y=x+f(0)$ 은 $f(x)$ 와 서로 다른 두 점에서만 만난다.

- ① 23 ② 24 ③ 25 ④ 26 ⑤ 27

9. 함수 $f(x) = \frac{1}{8}x^2(x-6)$ 에 대하여 함수 $|f(|x|-a)+b|$ 의 미분가능하지 않은 모든 점의 개수가 5 또는 7이 되도록 하는 정수 a, b 의 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는? (단, $a \leq 4$) [4점]
- ① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

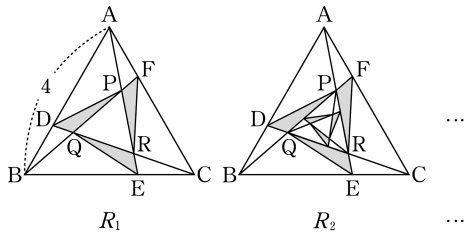
10. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]

(가) 미분가능한 함수 $f(|x|)$ 는 최솟값이 $\frac{5}{16}$ 이다.
 (나) 함수 $|f(x)-2|$ 는 오직 $x = a(a < 0)$ 에서만 미분가능하지 않다.

- ① $\frac{29}{16}$ ② $\frac{15}{8}$ ③ $\frac{31}{16}$ ④ 2 ⑤ $\frac{33}{16}$

11. $\overline{AB}=4$ 인 정삼각형 ABC 가 있다. 그림에서 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 를 2:1로 내분하는 점을 각각 D , E , F , \overline{AE} 와 \overline{BF} , \overline{BF} 와 \overline{CD} , \overline{CD} 와 \overline{AE} 가 서로 만나는 점을 각각 P , Q , R 라 하고, 세 삼각형 PQD , QRE , RPF 에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 정삼각형 PQR 에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]

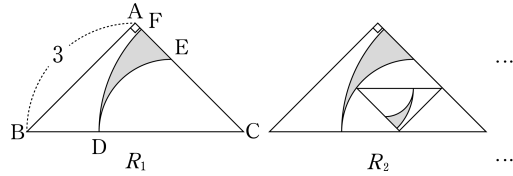


- ① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 그림과 같이 $A=90^\circ$, $\overline{AB}=3$ 인 직각이등변삼각형 ABC 가 있다. 선분 BC 를 1:2로 내분하는 점을 D , 선분 CD 를 지름으로 하는 원이 삼각형 ABC 와 만나는 점 중에서 D 가 아닌 점을 E , 선분 CD 를 반지름으로 하고 중심이 C 인 원이 삼각형 ABC 와 만나는 점 중에서 D 가 아닌 점을 F 라 하고, 호 DE , 호 DF , 선분 EF 로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 호 DE 와 삼각형 ABC 로 둘러싸인 부분에 내접하는 직각이등변삼각형을 작은 선분이 선분 AB 와 평행 또는 수직이 되도록 그린다. 이 삼각형에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 호를 그리고 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{25(\pi-2)}{42}$ ② $\frac{13(\pi-2)}{21}$ ③ $\frac{9(\pi-2)}{14}$
- ④ $\frac{3(\pi-2)}{2}$ ⑤ $\frac{29(\pi-2)}{42}$

13. 최고차항의 계수가 1이고 모든 항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(2)$ 의 값은? [4점]

- (가) $f'(1)=12$
- (나) 구간 $(-3, 0)$ 에서 극댓값, 극솟값을 모두 갖는다.

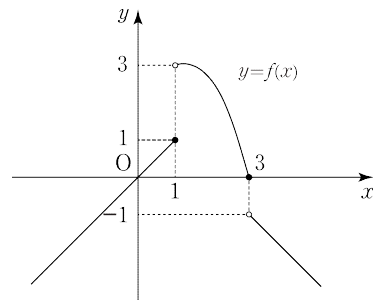
- ① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

14. 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \leq 1) \\ -(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right) & (1 < x \leq 3) \\ -x+2 & (x > 3) \end{cases}$$

이다. $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1이고 상수항이 -9 인 삼차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(5)$ 의 값은? [4점]

- (가) 함수 $g(f(x))$ 는 한 점에서만 불연속이다.
- (나) $g'(3)=g'(a)=0$ ($a > 0, a \neq 3$)



- ① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

15. 첫째항이 1이고 공차가 1보다 큰 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, 자연수 k 의 최댓값은? [4점]

(가) $200 > a_k$
 (나) a_k 까지의 모든 항 중에서 자연수인 항의 개수는 10이다.

- ① 175 ② 180 ③ 185 ④ 190 ⑤ 195

16. 자연수 n, x, y 에 대하여 두 집합 A_n, B 를

$$A_n = \{(x, y) \mid x + 4y = 20n - 10\}$$

$$B = \{(x, y) \mid x \leq 2y\}$$

라 하자. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_n = (\text{집합 } A_n \cap B \text{의 원소의 개수})$$

일 때, $\sum_{n=1}^{30} a_n$ 의 값은? [4점]

- ① 745 ② 750 ③ 755 ④ 760 ⑤ 765

17. 정사각형 ABCD에서 $\overline{AB}=6$ 이고, 점 E는 선분 AD의

중점이다. 그림과 같이 정사각형 ABCD의 외부에 점 F를 $2\overline{EF}=\overline{AD}$, $\angle FAE=45^\circ$ 가 되도록 그리고 선분 EA와 선분 ED를 1:2로 내분하는 점을 각각 G, H라 하자.

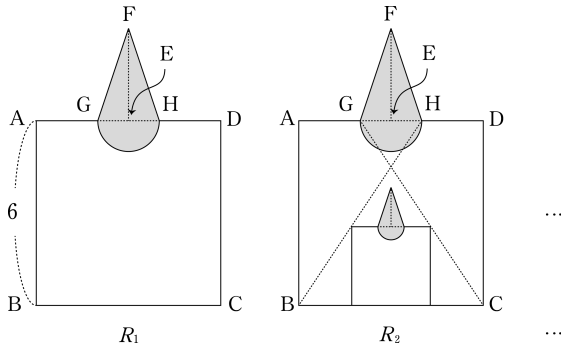
지름이 선분 GH인 반원을 정사각형 ABCD의 내부에 그리고 선분 GF, 선분 HF, 호 GH로 둘러싸인 부분인

모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 BH, 선분 CG, 정사각형 ABCD로 둘러싸인 삼각형 중 큰 삼각형의 내부에 두 꼭짓점이 삼각형의 두 변 위에 있고 한 변이 선분 BC 위에 있도록 정사각형을 그리고 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로

만들어지는 모양에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{49\left(3 + \frac{\pi}{2}\right)}{10}$ ② $\frac{49\left(3 + \frac{\pi}{2}\right)}{20}$ ③ $\frac{49\left(3 + \frac{\pi}{2}\right)}{30}$
 ④ $\frac{49\left(3 + \frac{\pi}{2}\right)}{40}$ ⑤ $\frac{49\left(3 + \frac{\pi}{2}\right)}{50}$

18. 다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수가 16 이상 64 이하가 되도록 하는 자연수 n 의 개수는? [4점]

(가) $x+y+z+w=15$

(나) $n-1 < x < n+2$

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

19. 함수 $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b-a}{2}x^2 - bx$ ($a > 0$)이다. 실수 t 에 대하여 함수 $|f(x)+t|$ 의 미분가능하지 않은 서로 다른 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자. t 에 관한 방정식 $2g(t) = mt + 6$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 m 의 최솟값이 -1 일 때, $f(1)$ 의 값은? [4점]
- ① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

20. 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 $-\frac{1}{3}$ 이고, $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x) = x$ 의 두 실근이 a, b 일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $a < b$) [4점]

— <보 기> —

ㄱ. $b = 0$ 이면 $f'(2) < 0$ 이다.

ㄴ. $a + b = ab$ 이면 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 갖는다.

ㄷ. $f'(1) > 1$ 이고 $ab > 0$ 이면 $f(a) < f(b)$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 삼차함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = x^3 - f(1)x^2 + f(2)$$

이다. 실수 t 에 대하여 점 $(0, t)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 개수가 2 이상일 때, t 의 최솟값은? [4점]

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

22. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 a_k = 111 \quad (a_1 \neq 1)$$

을 만족시킬 때, 가능한 모든 자연수 k 의 값의 합은? [3점]

- ① 38 ② 43 ③ 48 ④ 53 ⑤ 58

23. 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)$$

이다. 실수 a 에 대하여 구간 $[a, a+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값과 최댓값의 곱을 $g(a)$ 라 하자. 방정식 $g(a) = 0$ 의 실근이 무수히 많고 $g(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 최솟값이 -3 일 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

24. 모든 항이 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \quad |a_3| \leq 1, \quad |a_2 - a_1| \leq 1$$

$$(나) \quad (a_1)^3 + (a_2)^3 + (a_3)^3 = 3a_1a_2a_3$$

a_1 의 값으로 가능한 모든 값의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

25. a_1 이 20 이하의 정수이고 공차가 -2 이며

$$\frac{\sqrt{a_5}}{\sqrt{a_{20}}} + \sqrt{\frac{a_5}{a_{20}}} = 0$$

을 만족시키는 모든 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_1 의 값으로 가능한 모든 값의 개수는? [4점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

26. 공차가 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_2 의 최댓값은? [3점]

x 에 관한 부등식 $(a_{10} - 2^7)x > a_1$ 의 해는 모든 실수이다.

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

27. 공차가 1이고 $a_1 \neq 16$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^9 \sqrt{(a_n)^2} = 4(a_7 + a_8)$$

일 때, a_{20} 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

28. 공차의 절댓값이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을

만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [3점]

(가) $a_1 \times a_4 = 0$

(나) a_3 과 $a_2 - a_5$ 의 값은 양수이다.

- ① -30 ② -15 ③ 0 ④ 15 ⑤ 30

110615 N제 정답표

문항 번호	정답
1	⑤
2	①
3	③
4	⑤
5	②
6	③
7	②
8	②
9	④
10	①
11	④
12	①
13	④
14	①
15	④
16	③
17	④
18	③
19	③
20	⑤
21	④
22	⑤
23	②
24	⑤
25	②
26	③
27	④
28	①