

# 수학 영역(나형) by 고지우

**5지선다형**

1. 집합  $A = \{1, 2, \{2, 3\}, \phi\}$ 에 대하여 옳은 것은? [2점]

- ①  $\{\phi\} \subset A$       ②  $3 \in A$       ③  $\{1\} \in A$
- ④  $\{1, 2\} \in A$     ⑤  $\{2, 3\} \subset A$

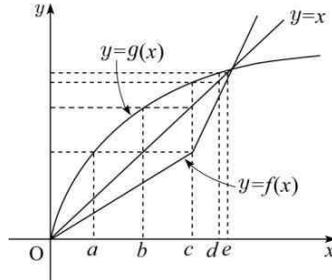
2.  $8^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ①  $\frac{1}{8}$       ②  $\frac{1}{4}$       ③ 2      ④ 4      ⑤ 8

3. 등비수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_3 + a_4 = 2$ ,  $a_5 + a_6 = 6$ 일 때,  $a_7 + a_8$ 의 값은? [2점]

- ① 16      ② 17      ③ 18      ④ 19      ⑤ 20

4. 그림은  $x \geq 0$ 에서 정의된 두 함수  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$ 의 그래프와 직선  $y=x$ 를 나타낸 것이다.  $g^{-1}(f(c))$ 의 값은? (단,  $g$ 는 역함수가 존재하는 함수이다.) [3점]



- ① a      ② b      ③ c
- ④ d      ⑤ e

5. 두 유리함수  $y = \frac{ax+1}{2x-6}$ ,  $y = \frac{bx+1}{2x+6}$ 의 그래프가 직선  $y=x$ 에 대하여 대칭일 때,  $b-a$ 의 값은? (단,  $a, b$ 는 상수이다.) [3점]

- ① 11      ② 12      ③ 13      ④ 14      ⑤ 15

6. 함수  $y = -\sqrt{2x-4} - a$ 의 그래프가 점  $(4, a)$ 를 지날 때, 이 함수의 최댓값은? (단,  $a$ 는 상수이다.) [3점]

- ① 1      ②  $\frac{3}{2}$       ③ 2      ④  $\frac{5}{2}$       ⑤ 3

7. 수열  $\{a_n\}$ 이 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$2n+1 < a_n < 2n+2$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n)^2}{n^2+3}$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

8. 공차가  $d_1 (d_1 \neq 0)$ 인 등차수열  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 에 대하여 두 수열

$$a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8, \dots$$

$$a_1 + a_2 + a_3, a_4 + a_5 + a_6, a_7 + a_8 + a_9, \dots$$

의 공차를 각각  $d_2, d_3$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? [3점]

- ①  $2d_2 = 3d_3$       ②  $3d_2 = 2d_3$       ③  $5d_2 = 2d_3$   
 ④  $7d_2 = 3d_3$       ⑤  $9d_2 = 4d_3$

9. 집합  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 집합  $X$ 를

$$X = \{p - q \mid p \in S, q \in S, p > q\}$$

라 할 때,  $n(X)$ 의 값은? [3점]

- ① 1      ② 2      ③ 3      ④ 4      ⑤ 5

# 수학 영역(나형)

3

10. <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

< 보 기 >

ㄱ.  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$

ㄴ.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{2}{n(n+1)}$

ㄷ.  $\sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^k l \right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

- ① ㄱ                      ② ㄴ                      ③ ㄱ, ㄷ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11.  $x$ 가 양수일 때, 세 점  $P\left(x, \frac{1}{x}\right)$ ,  $Q(-1, 0)$ ,  $R(0, -9)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR의 넓이는  $x=p$ 일 때 최솟값  $q$ 를 갖는다.  $p \times q$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{3}{2}$             ②  $\frac{5}{2}$             ③  $\frac{7}{2}$             ④  $\frac{9}{2}$             ⑤  $\frac{11}{2}$

12. 두 자연수  $a, b$ 에 대하여 세 조건  $p, q, r$ 가 다음과 같다.

- $p$  :  $ab$ 는 홀수이다.  
 $q$  :  $a+b$ 는 짝수이다.  
 $r$  :  $a^2+b^2$ 은 짝수이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

< 보 기 >

ㄱ. 명제  $q \rightarrow p$ 의 역은 참이다.

ㄴ.  $q \Leftrightarrow r$

ㄷ.  $\sim r$ 는  $\sim p$ 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

13.  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{1}{3}$ 인 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{6}$ 일 때

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{a_n a_{n+2}}$ 의 값은? [3점]

- ① -1            ② -3            ③ -5            ④ -7            ⑤ -9

14.  $1 < x < 3$ 이고  $3 < y < 5$ 인 두 실수  $x, y$ 에 대하여 집합  $A = \{1, x, 3, y, 5\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 각각  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$ 이라 하고, 집합  $A_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, 10$ )의 두 원소 중 작은 수를  $m_k$ , 큰 수를  $M_k$ 라 하자.  $m_k$ 와  $M_k$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $12x+6y$ 의 최댓값은? [4점]

(가)  $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{10} \leq 19$   
 (나)  $M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_{10} \leq 41$

- ① 41      ② 42      ③ 43      ④ 44      ⑤ 45

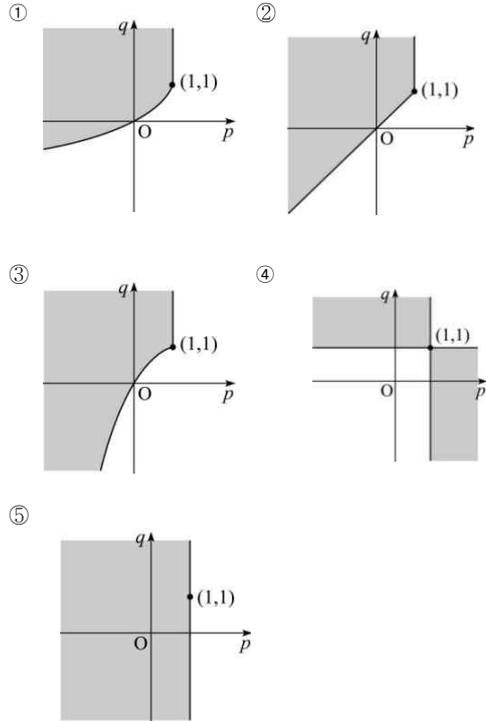
15. 집합  $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Y = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $Z = \{5, 6, 7, 8\}$ 에 대하여 일대일 대응인 두 함수  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(3) = g(3)$   
 (나)  $(g \circ f)(1) = 5$   
 (다)  $f^{-1}(3) > 1$   
 (라)  $f(4) = g(f(4)) - 2$

$f(4) + g(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 10      ② 11      ③ 12      ④ 13      ⑤ 15

16. 좌표평면에서 무리함수  $y = \sqrt{x-p} + q$ 의 그래프가 도형  $A = \{(x, y) | x=1 \text{ 이고 } y \geq 1\}$ 과 한 점에서 만난다고 한다. 이때, 점  $(p, q)$ 가 존재하는 영역을 나타낸 것은? (단, 경계선 포함) [4점]



17. 다음은 모든 자연수  $n$  에 대하여

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)(2n+1-2k)^2 = \frac{n^2(2n^2+1)}{3}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i)  $n=1$ 일 때, (좌변)=1, (우변)=1 이므로  
주어진 등식은 성립한다.

(ii)  $n=m$ 일 때, 등식

$$\sum_{k=1}^m (2k-1)(2m+1-2k)^2 = \frac{m^2(2m^2+1)}{3}$$

이 성립한다고 가정하자.  $n=m+1$  일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} (2k-1)(2m+3-2k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^m (2k-1)(2m+3-2k)^2 + \boxed{(가)}$$

$$= \sum_{k=1}^m (2k-1)(2m+1-2k)^2$$

$$+ \boxed{(나)} \times \sum_{k=1}^m (2k-1)(m+1-k) + \boxed{(가)}$$

$$= \frac{(m+1)^2 \{2(m+1)^2 + 1\}}{3}$$

이다. 따라서  $n=m+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수  $n$  에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을  $f(m)$ , (나)에 알맞은 수를  $p$  라 할 때,  $f(3)+p$  의 값은? [4점]

- ① 11                      ② 13                      ③ 15  
④ 17                      ⑤ 19

18. 첫째항이 1이고 공비가  $r$ 인 등비수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터

제  $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라 할 때,  $\frac{S_{30}}{S_{10}} = 7r^{10} - 8$ 이 성립한다.

$\frac{S_{40}}{S_{10}}$ 의 값은? (단,  $r \neq 1$ ) [4점]

- ① 30            ② 35            ③ 40            ④ 45            ⑤ 50

19.  $a, b, c$ 가 서로 다른 세 실수일 때, 이차함수

$f(x) = ax^2 + 2bx + c$ 에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

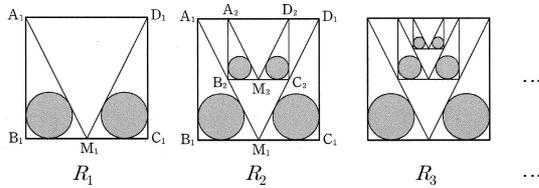
— < 보 기 > —

ㄱ.  $a, b, c$ 가 이 순서로 등차수열을 이루면  $f(1) = 4b$ 이다.  
 ㄴ.  $a, b, c$ 가 이 순서로 등차수열을 이루면  $y = f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.  
 ㄷ.  $a, b, c$ 가 이 순서로 등비수열을 이루면  $y = f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 만나지 않는다.

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
④ ㄴ, ㄷ                      ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형  $A_1B_1C_1D_1$  에서 변  $B_1C_1$  이 중점  $M_1$  을 잡아 두 삼각형  $A_1B_1M_1$ ,  $D_1M_1C_1$  에 각각 내접하는 원을 그리고 두 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$  이라 하자. 그림  $R_1$  에서 선분  $A_1D_1$  위의 두 점  $A_2$ ,  $D_2$  와 선분  $A_1M_1$  위의 점  $B_2$  및 선분  $D_1M_1$  위의 점  $C_2$  를 잡아 정사각형  $A_2B_2C_2D_2$  를 그리고, 정사각형  $A_2B_2C_2D_2$  에서 그림  $R_1$  을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 원의 내부에 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$  라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여  $n$  번째 얻은 그림  $R_n$  에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$  이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  의 값은? [4점]



- ①  $\frac{10-4\sqrt{5}}{3} \pi$
- ②  $\frac{28-12\sqrt{5}}{3} \pi$
- ③  $\frac{21-9\sqrt{5}}{2} \pi$
- ④  $\frac{26-10\sqrt{5}}{3} \pi$
- ⑤  $\frac{19-7\sqrt{5}}{2} \pi$

21.  $a > 1$  인 실수  $a$  에 대하여  $a^{\log_5 16}$  이  $2^n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 이 되도록 하는  $a$  를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때,  $k$  번째 수를  $a_k$  라 하자.  $\sum_{k=1}^{40} \log_5 a_k$  의 값은? [4점]

- ① 185
- ② 190
- ③ 195
- ④ 200
- ⑤ 205

**단답형**

22.  $\log_{(x-3)}(-x^2+11x-24)$ 가 정의되기 위한 모든 정수  $x$ 의 합을 구하시오. [3점]

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \left\{ \left( n + \frac{1}{n} \right)^{10} - \frac{1}{n^{10}} \right\}$ 이 수렴하기 위한  $k$ 의 최소값을 구하시오. [3점]

24. 수열  $\{a_n\}$ 이  $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수  $n$ 에 대하여

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

을 만족시킬 때,  $12a_6$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 함수  $f(x) = 2x + |x| + 4$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $g(1) + g^{-1}(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26.  $2 \leq n \leq 100$ 인 자연수  $n$ 에 대하여  $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$ 이 어떤 자연수의  $n$ 제곱근이 되도록 하는  $n$ 의 개수를 구하시오. [4점]

27. 두 수열  $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2b_n) = 2$$

를 만족시킬 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(a_n)^2}{2b_n} - \frac{(2b_n)^2}{a_n} \right\}$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 자연수  $m$ 에 대하여 함수  $f(m)$ 을

$$f(m) = \log_2 \left( 1 + \frac{1}{m+2} \right) \text{ 이라 하자. } \sum_{k=1}^n f(k) \text{의 값이 자연수가}$$

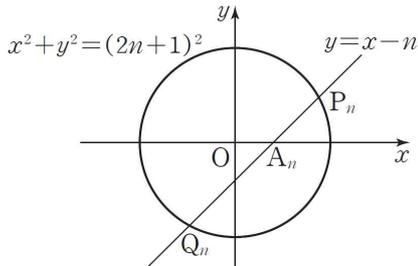
되도록 하는 100 이하의 모든 자연수  $n$ 의 값의 합을 구하여라.  
[4점]

29. 좌표평면에서 그림과 같이 자연수  $n$ 에 대하여 원

$$x^2 + y^2 = (2n+1)^2 \text{과 직선 } y = x - n \text{이 만나는 두 점을 각각 } P_n,$$

$Q_n$ 이라 하자. 점  $A_n(n, 0)$ 에 대하여  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{P_n Q_n}^2}{\overline{A_n P_n} \times \overline{A_n Q_n}} = a$  일

때,  $30a$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 수열  $\{a_n\}$ 의 각 항이 모두 양수일 때,

$$\frac{a_1}{a_1+1} = \frac{a_2}{a_2+3} = \frac{a_3}{a_3+5} = \dots = \frac{a_{1006}}{a_{1006}+2011},$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1006} = 2012$$

가 성립한다.  $a_1 = \frac{p}{q}$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하여라.

(단,  $p, q$ 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.