

# 06 수열의 합

## 수학II 교과서 Review

### 문제 1

수열  $\{a_n\}$ 은 첫째항이 7이고 공차가 2인 등차수열일 때, 다음 합을 구하여라.

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{109}} + \sqrt{a_{110}}}$$

### 문제 2

수열  $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 $n$ 항까지의 합을  $S_n$ 이라고 하자.  $S_n = -n^2 + 24n$ 일 때,  $\sum_{k=1}^{40} |a_k|$ 의 값은?

- ① 144                      ② 640                      ③ 784                      ④ 928                      ⑤ 956

### 문제 3

수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2^n$ 일 때,  $a_1 + a_7$ 의 값은?

- ① 78                      ② 79                      ③ 80                      ④ 81                      ⑤ 82

### 문제 4

$\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n$ 일 때,  $\sum_{k=1}^n k \cdot a_{2k}$ 를 구하여라.

# 06 수열의 합

## 수학II 교과서 Review

문제 5

$\sum_{k=1}^{20} (a_{2k-1} + a_{2k}) = 47$ 일 때,  $\sum_{k=1}^{40} (2a_k - 1)$ 의 값을 구하여라.

문제 6

$\sum_{n=1}^5 \left\{ \sum_{k=1}^n (k+n) \right\}$ 의 값을 구하여라.

문제 7

다음 합을 구하여라.

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$$

문제 8

수열  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ 은 0, 1, 2의 값 중에서 어느 하나를 가진다.  $\sum_{k=1}^n a_k = 15$ ,  $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 27$ 일 때,  $\sum_{k=1}^n a_k^3$ 의 값은?

① 51

② 53

③ 55

④ 57

⑤ 59

# 06 수열의 합

## 수학II 교과서 Review

문제 9

$f(a) = \sum_{k=1}^5 (k^2 + 4ak - a^2)$ 일 때,  $f(a)$ 의 최댓값을 구하여라.

문제 10

다음 합을 구하여라.

$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+100}$$

문제 11

다음 수열의 첫째항부터 제20항까지의 합이  $p + \left(\frac{1}{2}\right)^q$ 일 때,  $p+q$ 의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 써라. (단,  $p, q$ 는 자연수)

$$1, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \dots$$

문제 12

다음 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을  $\frac{10^{11} - 10^a}{b}$ 으로 나타낼 때, 자연수  $a, b$ 의 값을 구하여라.

$$9 \dots, 99, 999, 9999, \dots$$

# 06 수열의 합

## 수학II 교과서 Review

### 문제 13

$x$ 에 대한 이차방정식  $x^2 - 6x + (2n+1)(2n+3) = 0$ 의 두 근  $\alpha_n, \beta_n$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{10} \left( \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값을 구하여라.

### 문제 14

이차방정식  $x^2 - 3x - 5 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라고 할 때,  
 $(1-\alpha)(1-\beta) + (2-\alpha)(2-\beta) + (3-\alpha)(3-\beta) + \dots + (10-\alpha)(10-\beta)$ 의 값은?  
 ① 130                      ② 140                      ③ 150                      ④ 160                      ⑤ 170

### 문제 15

다음과 같이 나열된 55개의 수의 합을 구하여라.

				1									
				2	4								
				3	6	9							
				4	8	12	16						
				5	10	15	20	25					
				6	12	18	24	30	36				
				7	17	21	28	35	42	49			
				8	16	24	42	40	48	56	64		
				9	18	27	36	45	54	63	72	81	
				10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

# 06 수열의 합

## 수학II 교과서 Review

### 〈정답 및 해설〉

1.  $-\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{15}{2}$

2. ④

3. ③

4.  $\frac{n(n+1)(8n+7)}{6}$

5.  $\sum_{k=1}^{20} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{40} a_k = 47$  이므로  
 $\sum_{k=1}^{40} (2a_k - 1) = 2 \sum_{k=1}^{40} a_k - 40 = 54$

6.  $\sum_{n=1}^5 \left\{ \sum_{k=1}^n (k+n) \right\} = \sum_{n=1}^5 \left( \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n n \right)$   
 $= \sum_{n=1}^5 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \right\}$   
 $= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^5 (3n^2 + n)$   
 $= \frac{1}{2} \left( 3 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} \right)$   
 $= 90$

7.  $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

8. ①

9. 235

10. 제  $k$ 항은  $a_k = \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2}{k(k+1)}$

이므로 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{100} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \right\}$$

$$= 2 \left( 1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{200}{101}$$

11. 주어진 수열의 일반항은

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} = \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

▶ 30%

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{20} 2 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^k \right\} = \sum_{k=1}^{20} 2 - \sum_{k=1}^{20} \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1}$$

$$= 2 \cdot 20 - \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{20}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 40 - 2 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{20} \right\}$$

$$= 38 + \left( \frac{1}{2} \right)^{19}$$

▶ 50%

따라서  $p = 38, q = 19$ 이므로

$$p + q = 57$$

▶ 20%

12.  $9 = 10 - 1, 99 = 10^2 - 1, 999 = 10^3 - 1, \dots$  에서 주어진 수열의 일반항은  $a_n = 10^n - 1$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} (10^k - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} 10^k - \sum_{k=1}^{10} 1$$

$$= \frac{10(10^{10} - 1)}{10 - 1} - 10 \times 1$$

$$= \frac{10^{11} - 100}{9} = \frac{10^{11} - 10^2}{9}$$

이므로  $a = 2, b = 9$

13. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n + \beta_n = 6, \alpha_n \beta_n = (2n+1)(2n+3)$  이므로

$$\sum_{n=1}^{10} \left( \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) = \sum_{n=1}^{10} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{10} \frac{6}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{10} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

$$= 3 \left\{ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left( \frac{1}{21} - \frac{1}{23} \right) \right\}$$

$$= 3 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{23} \right) = \frac{20}{23}$$

14. ⑤

15. 1705