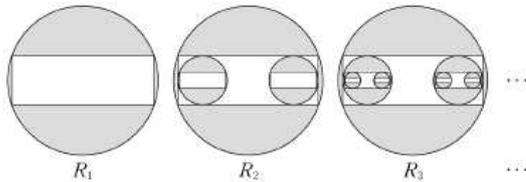




14. 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 그림과 같이 가로와 세로의 길이의 비가 3:1인 직사각형을 이 원에 내접하도록 그리고, 원의 내부와 직사각형의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자. 그림  $R_1$ 에서 직사각형의 세 변에 접하도록 원 2개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림  $R_1$ 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자. 그림  $R_2$ 에서 새로 그려진 직사각형의 세 변에 접하도록 원 4개를 그린다. 새로 그려진 각 원에 그림  $R_1$ 을 얻는 것과 같은 방법으로 직사각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을  $R_3$ 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에서 색칠된 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{5}{4}\pi - \frac{5}{3}$
- ②  $\frac{5}{4}\pi - \frac{3}{2}$
- ③  $\frac{4}{3}\pi - \frac{8}{5}$
- ④  $\frac{5}{4}\pi - 1$
- ⑤  $\frac{4}{3}\pi - \frac{16}{15}$

자, 무한등비급수에서 여러분은 무얼배웠죠??

네!

$$\frac{a}{1-r}$$

요놈이죠? 뭐 자질구레 한것 많이 배웠지만 결국은 저것 배웠습니다. (... 이걸 뭐지? 하는분들은 교과서부터 정독 부탁드립니다.)

우리가 배운건 이걸데.. 그럼 문제는 무얼 물을까요?

네!

$$\frac{a}{1-r}$$

당연하죠? 이걸로 우린 모든걸 풀겁니다. 저 공식을 사용하기 위해선 단 두가지만 알면 됩니다.

바로,

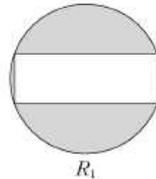
### 1.첫째항

### 2.공비

당연하다고요? ... 근데 왜 틀리세요  $\pi\pi...$

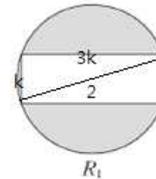
자 해설보시면서, 어떻게 문제에 적용시키는지 봅시다 !!

첫째항 먼저 구해야겠지요?



< 이 놈 넓이가 곧 첫째항이 됩니다. 넓이 구해보면, 원의 넓이에서 사각형 넓이 빼주면 되니,  $\pi - 6/5$  입니다.

(복잡합니다만, 구해보세요. 직사각형의 가로 세로 비가 3:1 인것과, 지름이 2 인 걸 사용해서요.)



자 그 다음은, 공비입니다.

이 공비가 문제인데, 제 설명을 잘들어 보세요.

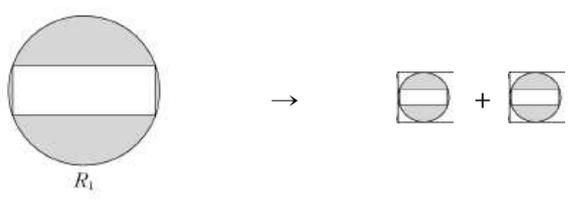
“공비” 라는건 결국 비율을 의미합니다. 첫째항에서 둘째항으로 갈 때 어느 정도의 비율로 변화하였는지, 가 중요합니다.

“ 아 그래서 R2 를 구해서 R1 과 비교하면 되나요 ^^?”

“... 아녀 .”

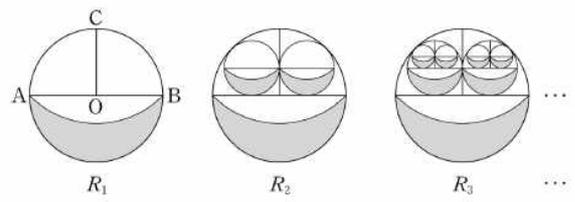
그게 아닙니다. 왜 R2 를 직접 구하나요. 변화하는 정도만 알면됩니다.

다음페이지에서 계속하겠습니다.



첫째. 바로 이것. 무슨소리가 하면, R1의 저 원은,  
**크기가 줄고, 두 개가 되어**  
 R2 에 들어갑니다. 이 변화하는 비율만 따져주면 됩니다.  
 둘째, **넓이비 는 (길이비)<sup>2</sup>.**  
 간혹 제가 가르치는 학생들보면, 공비를 구해야하므로  
 A1 과 A2 의 넓이를 구해서 그 값을 통해 공비를 구하더군요.

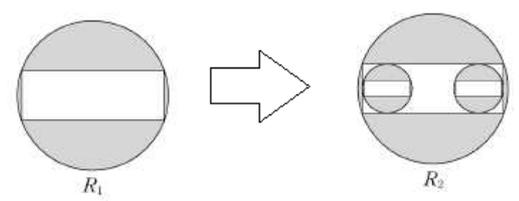
.....흠.. 맞죠.. 맞는데.



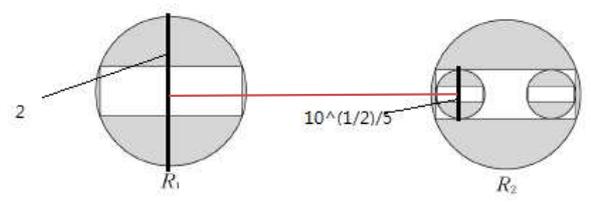
그럼 이런 어찌시게요... ㅠㅈㅠㅈ

자, 물론 저런 것도 넓이를 구할 수 있지만, 중학도형에서 배웠던 것이죠?  
**넓이비 는 (길이비)<sup>2</sup>.**

이걸 통해서 좀 더 빠르게 공비를 구할 수 있습니다.  
 아니, 이걸 이용해야만 합니다.  
 우리목적은 공비 구하는 것이니깐요. 어떻게든 빠르고 정확하게 공비만  
 구해내면 됩니다.  
 당연한소리로 들리는 학생들도 있겠지만 ≡≡ 점검한답시고 계속 읽어보세요.  
 그럼 옆에 그림을 통해  
 길이비를 어떻게 **빠르게** 구하는지 배워보죠.



길이비를 구할 땐, 가장 쉽게 구할 수 있는 길이를 구하면 됩니다.  
 이 문제에선, 이렇게 되겠군요.



그림에 그려져 있는 저 줄, 즉 큰원의 지름과 그 원이 줄어든 작은 원의 지름의  
 길이비를 구하면 됩니다.  
 그 길이비를 구한 후, 제곱하여 넓이비를 구합니다.  
 다만 여기서 !!!!

그림 보면 알겠지만 개체가 줄어든 후 갯수가 두개로 늘었습니다.  
 즉 넓이자체도 두배가 되어야하는 것입니다.  
 그러므로 아간 구한 넓이비에 X2 해주시면 됩니다.

만약 도형이 줄어든 뒤에 4개로 늘어나면 어떻게 해야 될까요?

네. 넓이비 구한 후 X4 해주시면 됩니다.

그 값이 공비가 되는 것입니다.

이제 첫째항 과 공비 구했으니

$$\frac{a}{1-r}$$

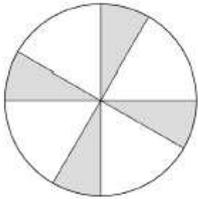
해주면 되겠군요 ≡≡.

다음 문제 풀면서 다시 확인해 보겠습니다.

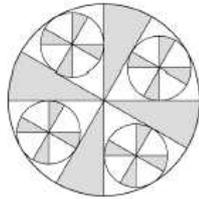
< 14년도 9월 평가원 A형 16번 문항 >

16. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 중심각의 크기가  $60^\circ$ 이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개 그린 후 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 1]이라 하자.

[그림 1]에서 색칠되지 않은 각 부채꼴에 두 반지름과 호에 모두 접하도록 원을 그린다. 새로 그린 각 원에 중심각의 크기가  $60^\circ$ 이고 반지름의 길이가 새로 그린 원의 반지름의 길이와 같은 부채꼴을 서로 겹치지 않게 4개씩 그린 후 새로 그린 원의 내부와 새로 그린 부채꼴의 외부에 공통으로 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 [그림 2]라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림에서 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



[그림 1]



[그림 2]

- ①  $\frac{7}{15}\pi$     ②  $\frac{8}{15}\pi$     ③  $\frac{3}{5}\pi$     ④  $\frac{2}{3}\pi$     ⑤  $\frac{11}{15}\pi$

바로 가보도록 하죠.

### 1. 첫째항

### 2. 공비

첫째항을 구하긴 할건데.. 부채꼴의 넓이 어떻게 구하죠??

네. 반지름을  $r$ , 각도를  $\theta$ 라 했을 때, 부채꼴의 넓이  $S$ 는

$$S = \frac{1}{2}r^2\theta$$

넵. 그럼 첫째항은  $\pi/3$  임을 알 수 있습니다.

공비가 문제조 공비??

뭘 구한다구요? 네. **길이비**.

자. 길이비를 구하기 전에, 또 개념한번 보고 갈게요.

**원**은 자주 나오는 소재로, 자주 등장하는 소재인 만큼 자주 쓰이는 푸는 방법 또한 존재합니다. 볼게요.

#### 1. 원과 접하는 접선이 존재할 때.

- 접점과 원의 중심을 이은 선은 접선과 수직이다.
- 또한 그 접점이 문제해결의 point 다.

#### 2. 원과 원이 공존할 때.

- 중심을 이어라.

저 세 개념이 원과 관련하여 주로 쓰입니다. 그림으로 보겠습니다.

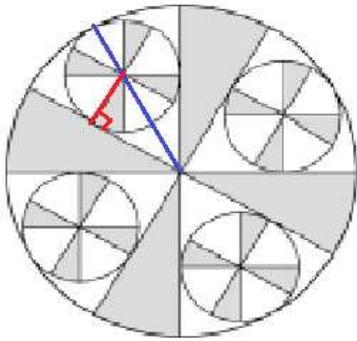
..는 다음페이지에서 다시 볼게요.

### 1. 원과 접하는 접선이 존재할 때.

- 점접과 원의 중심을 이은 선은 점선과 수직이다.
- 또한 그 접점이 문제해결의 point 다.

### 2. 원과 원이 공존할 때.

- 중심을 이어라.

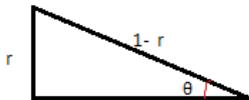


[그림 2]

원과 접선이 만나는 부분이 point 이므로, 그 점을 이용할 생각을 해서 수선을 그어줬습니다.

또한 원과 원이 공존하니 중심을 이어줬습니다.

그러면 그림에서 삼각형이 하나 나옵니다. 삼각형만 떼서 볼까요.



작은 원의 반지름을  $r$  이라 했을 때, 그림과 같은 결과가 나옵니다.

남득가시나요? 왜 빗변이  $1-r$  인지 아시겠나요??

큰 원의 반지름이 1이고, 작은 원의 반지름이  $r$ 입니다. 그 둘을 이용하려 중심끼리 이어줬고, 그 결과 삼각형의 빗변의 길이가  $1-r$  임을 알 수 있습니다.

그런데, 저  $\theta$  는 몇도죠? 네. 30 도입니다.

우리는 특수각을 배웠었죠??  $\Rightarrow$  ( 모르시면 피세요 교과서..)

그러므로  $1-r/r = 2$ 입니다.  $r = 1/3$  이군요.

자 무얼해야하죠?? 길이비 !!! 작은원과 큰원의 반지름 비를

길이비로 삼으면 간단하겠군요.

$1 : 1/3$ .

그 다음은? 넓이비. 길이비 제공하신 뒤에, 뭐 하죠??

네. 개체가 작아진 뒤에 4개로 늘어나고 있으니 4를 곱해주시면 됩니다.

즉, 공비는  $4/9$  입니다.

$$\frac{a}{1-r}$$

이거 써주시면, 답은  $3/5\pi$  네요. 간단합니다.

원에 관한 성질 기억해주세요. 꼭!

### 1. 원과 접하는 접선이 존재할 때.

- 점접과 원의 중심을 이은 선은 점선과 수직이다.
- 또한 그 접점이 문제해결의 point 다.

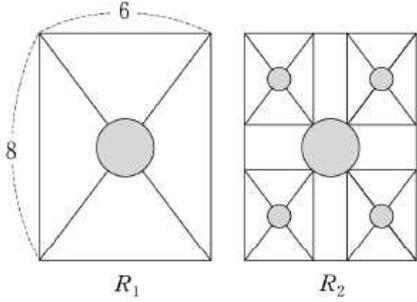
### 2. 원과 원이 공존할 때.

- 중심을 이어라.

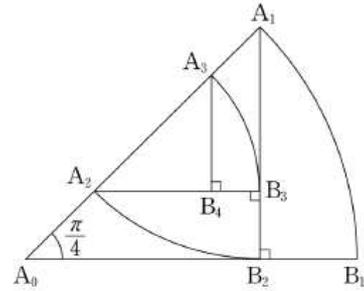
길이비 구할 때 항상 빠르고 쉽게 구할 수 있는 것 위주로 하라 했습니다.

그럼으로만 쪽 살피고 바로 다음 내용 넘어갈게요.

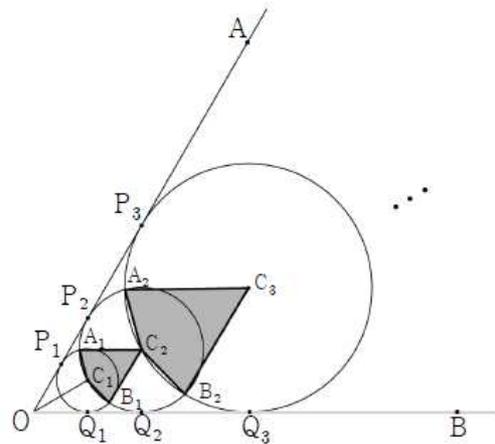
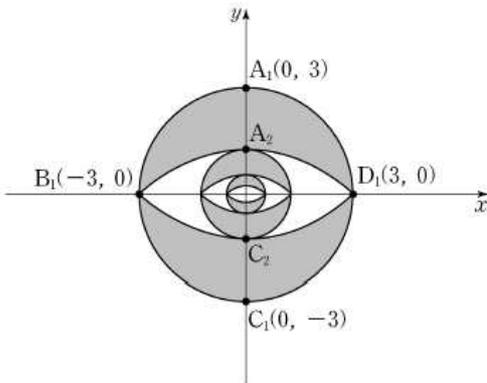
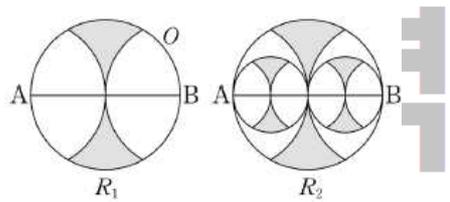
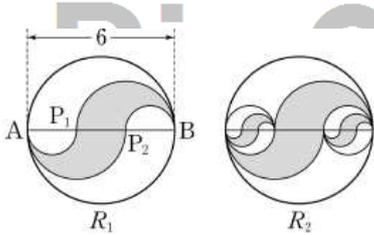
자. 그림만 보고 어떻게 구하는게 빠를지 선 그어보세요.

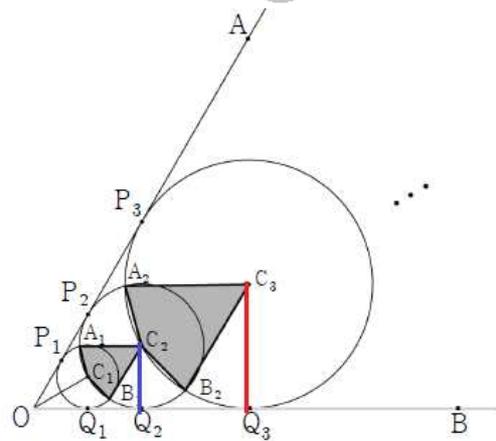
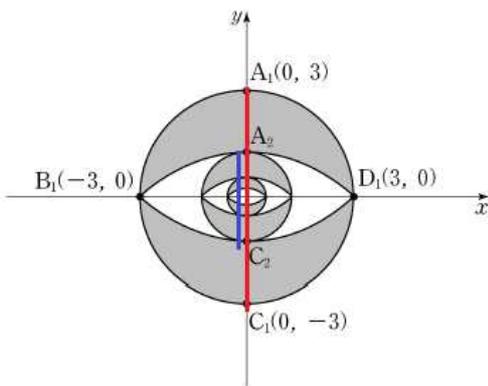
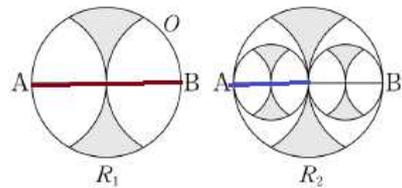
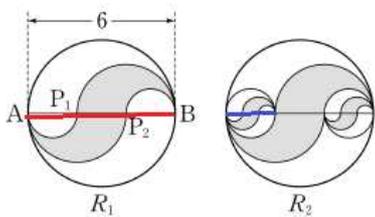
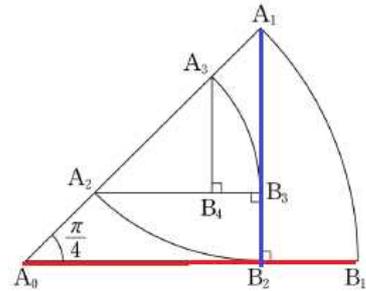
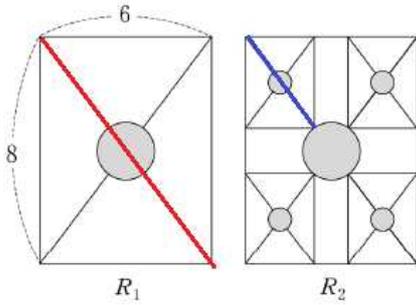


부제꼴  $A_{n-1}A_nB_n$ 의 호  $A_nB_n$ 의 길이를  $l_n$ 이라 할 때,  
 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ 의 값은? [3점]



이건 문제를 알아야 할 것 같아 문제도 첨부했습니다.



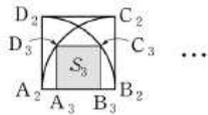
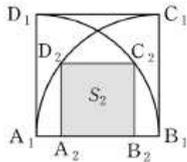
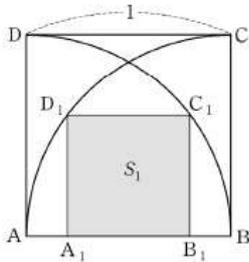


마지막 그림만 해설하자면, 원이 여러개 나왔으니 중심이여주고, 접선과 수선 그려주면 삼각형이 또 나오죠?? 그래서 쉽게 반지름 비로 길이비 구할 수 있습니다.

이어서 다음 개념 보겠습니다. !! 생소한 내용이실겁니다.

개념설명하기에 앞서, 문제 먼저 풀고 가겠습니다.

17. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 그림과 같이 정사각형 ABCD 안에 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 변 AB를 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>이라 하자. 정사각형 A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> 안에 두 점 A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>을 각각 중심으로 하고 변 A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>을 반지름으로 하는 2개의 사분원을 그린다. 이 두 사분원의 공통부분에 내접하는 정사각형을 A<sub>2</sub>B<sub>2</sub>C<sub>2</sub>D<sub>2</sub>라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 정사각형 A<sub>n</sub>B<sub>n</sub>C<sub>n</sub>D<sub>n</sub>의 넓이를 S<sub>n</sub>이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{3}{8}$
- ②  $\frac{9}{16}$
- ③  $\frac{4}{5}$
- ④  $\frac{9}{8}$
- ⑤  $\frac{23}{16}$

어렵죠? 제가 이걸 제대로 푸는 학생을 못봤어요..

이건 위에 있는 무한등비급수 문제들과는 조금 다른 유형의 문제입니다.

바로, “**미지수 설정 문항**” 입니다. (.. 제가 지었지만 이름 참..)

무슨 말이고 하면,

위에 문제들에선 모든 길이가 주어졌고 충분히 구할 수 있으므로,

그 길이비를 통해 넓이비 구해서 공비를 구했습니다만,

지금 옆에 문제와 같은 문항은 첫째항조차 구하기 힘듭니다.

왜냐하면 정의되어 있는 길이의 정보가 부족해서입니다.

그래서 우린 “**미지수를 설정**” 해줘야 하고, 우리가 아는 도형의 개념으로

문제를 푼다.

도대체 무슨 소리인지 아래 해설을 봅시다.

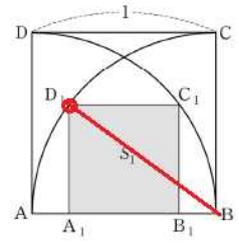
아니.. 인쇄해주는 여러분들(=.=)을 위해

해설은 다음페이지에서 하겠습니다.



일단, 아까 설명했던 개념인데,

원과의 접점은 point 이다. 해결의 실마리가 있다.



접점이 포인트이므로 그 점과 B (원의중심) 을 연결해 주었습니다. 그 길이는 1이구요.

그 다음은 어떻게 하죠??? 할 수 있는게 없을 겁니다.

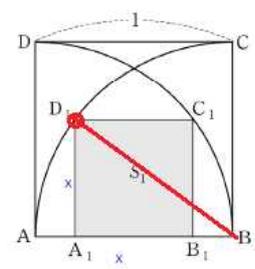
그래서 이젠 우린 미지수를 설정해야 합니다.

뭐한다구요?

Bin의 수학영역

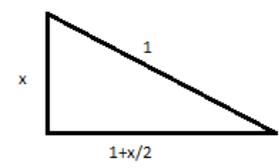
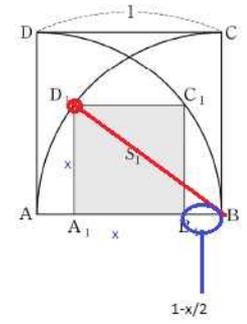
“미지수 설정”

S1의 넓이를 구해야 하므로 D1A1 을 x 라 두면,



이렇게 되지요. 그런데, AB 의 길이는 1이므로 ,

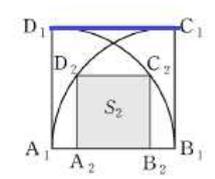
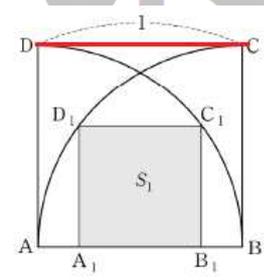
아, 그럼 또 삼각형이 나오는군요.



직각삼각형이므로, **피타고라스의 정리** 를 쓰면 됩니다.

그럼 x 에 관한 이차방정식이 나오고, 그렇게 x를 구할 수 있습니다.

x 를 구했으니 S1도 구할 수 있고, 길이비 또한 다음과 같으므로 공비도 쉽게 구할 수 있군요 !.



(x 와 D2C2 의 길이비로 구하는게 아닙니다.. 1과 x 로 길이비 구하는거죠.

항상 최대한 빨리 구할 수 있는 길이비로 구하시면 됩니다.

S1 이 S2 로 작아진거라 생각하셔도 되지만,

**ABCD 라는 개체가 A1B1C1D1 라는 개체로 작아지셨다 생각해드 됩니다.**[이거중요..]

쉽네요. 답은 9/16 인 2번.

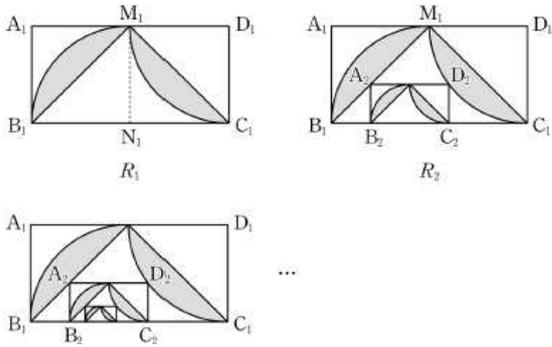
이 유형이 어떤 유형인지 감이 오시나요?? 출제되면 좀 어려운 문제인데,

이번 수능에 출제되었던 문제를 통해 ( 이거 틀리신 분들이 이번 칼럼

요청이 매우 꺾꺾 들어왔습니다.) 다시한번 이번 유형공부를 해보죠.

< 14수능 B형 15번문항 >

15. 직사각형  $A_1B_1C_1D_1$ 에서  $\overline{A_1B_1}=1$ ,  $\overline{A_1D_1}=2$ 이다. 그림과 같이 선분  $A_1D_1$ 과 선분  $B_1C_1$ 의 중점을 각각  $M_1, N_1$ 이라 하자. 중심이  $N_1$ , 반지름의 길이가  $\overline{B_1N_1}$ 이고 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴  $N_1M_1B_1$ 을 그리고, 중심이  $D_1$ , 반지름의 길이가  $\overline{C_1D_1}$ 이고 중심각의 크기가  $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴  $D_1M_1C_1$ 을 그린다. 부채꼴  $N_1M_1B_1$ 의 호  $M_1B_1$ 과 선분  $M_1B_1$ 로 둘러싸인 부분과 부채꼴  $D_1M_1C_1$ 의 호  $M_1C_1$ 과 선분  $M_1C_1$ 로 둘러싸인 부분인  모양에 색칠하여 얻은 그림을  $R_1$ 이라 하자. 그림  $R_1$ 에 선분  $M_1B_1$  위의 점  $A_2$ , 호  $M_1C_1$  위의 점  $D_2$ 와 변  $B_1C_1$  위의 두 점  $B_2, C_2$ 를 꼭짓점으로 하고  $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=1:2$ 인 직사각형  $A_2B_2C_2D_2$ 를 그리고, 직사각형  $A_2B_2C_2D_2$ 에서 그림  $R_1$ 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는  모양에 색칠하여 얻은 그림을  $R_2$ 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여  $n$ 번째 얻은 그림  $R_n$ 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를  $S_n$ 이라 할 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{25}{19} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$
- ②  $\frac{5}{4} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$
- ③  $\frac{25}{21} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$
- ④  $\frac{25}{22} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$
- ⑤  $\frac{25}{23} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$

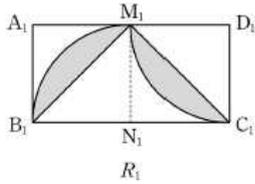
- 해설은 다음페이지에서 할게요.

수학영역

아, 강조한번 하고.

“미지수 설정 문항”

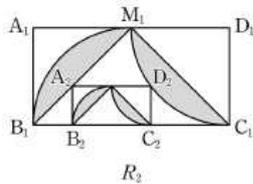
해설해보겠습니다.



첫째항 구하는건 쉽죠??(  $\pi/2-1$  ) 입니다.

자 그 다음은 길이비인데.. 다음 그림을 보면,

여러분이 더이상 할 수 있는게 없다는 걸 느낄 겁니다.



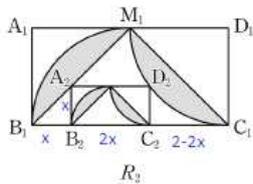
아.. 그쵸?? 길이에 관한 정보가 부족합니다.

어떻게 하라구요??

“미지수 설정”

A2B2 를 알아야 길이비를 구하므로, 그 부분을  $x$  라 하고,

주어진 정보로 다른 길이도  $x$ 로 표현하면,



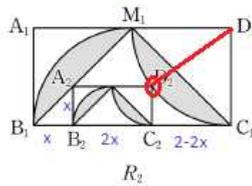
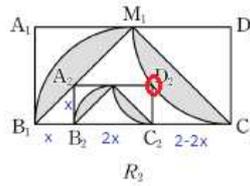
이런 그림이 됩니다. (안보이시면 부디 프린트해주세요 부디.)

잉?? 미지수까지 다됐는데 안풀린다구요?? 과연 ??

우리가 무언가 놓친게 있습니다. 바로,

원과의 접점은 point 이다. 해결의 실마리가 있다.

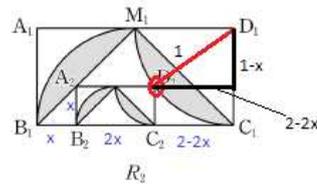
네. 접점..접점 꼭 찍어주세요. 찍고 중심과 연결.



아... 이렇게 하는 순간 방금 풀었던 문항과 매우 유사함을 알 수 있습니다.

잘모르시겠다구요?? 이젠 알아야죠.. (14.08.15 오타수정:  $2-2x \rightarrow 2-3x$ )

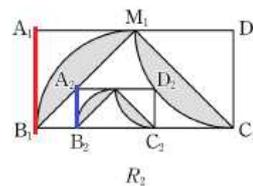
그럼보시겠습니다.



아하. 삼각형이었군요 삼각형..

삼각형이면... 피타고라스 정리 !! 그럼  $x$  를 구할 수 있고,

공비를 구할 수 있군요 !!



공비는  $1 : x$  로 구해주시는 겁니다..최대한 빠르게 구할 수 있는걸로 해달라 했습니다.

역시 핵심은,

“미지수 설정”

자, 이렇게 무한등비급수문제가 총 2개의 유형으로 나뉘는걸 배웠고,  
각각의 유형에서의 풀이법을 배웠습니다.  
물론 도형이 엄..청 다양해서 좀 더 배워야 할 개념은 많지만,  
텍스트로써의 한계가.. 있군요. ( 고작 조금했는데 12 페이지..)  
수업으로 하면 30분이면 똑딱하는걸 지금 6시가 다되가고 있습니다.  
동됐어요 ..  
하지만 여러분의 추천과 응원의 댓글, 감사하다는 댓글과 문자에  
제가 또 이렇게 최다요구 파트로 칼럼을 쓰게 되었습니다.  
항상 감사합니다 여러분 ㅎㅎ  
제 칼럼으로 한분 한분 도움 얻어가는게 참 기쁘더라고요.  
넵 이번 칼럼 여기서 마치겠습니다. 감사합니다.

# Bin의 수학영역