

고지우의 난문현답

제 1 회

1. 2017년 9월 평가원
2. 2015년 수능
3. 2014년 6월 평가원
4. 2014년 사관학교
5. 2013년 6월 평가원
6. 2010년 10월 교육청
7. 2011년 수능
8. 2015년 7월 교육청
9. 2009년 6월 평가원
10. 2009년 경찰대

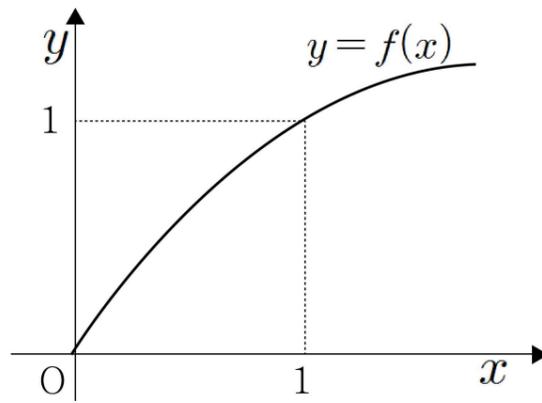
1. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 양의 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족한다.

(가) $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$
 (나) $g(x) = \frac{4}{e^4} \int_1^x e^{t^2} f(t) dt$

$f(1) = \frac{1}{e}$ 일 때, $f(2) - g(2)$ 의 값은?

- ① $\frac{16}{3e^4}$ ② $\frac{6}{e^4}$ ③ $\frac{20}{3e^4}$
 ④ $\frac{22}{3e^4}$ ⑤ $\frac{8}{e^4}$

2. 다음은 연속함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다.



구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 연속일 때, 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \frac{k}{n}$ 와 같은 값을 갖는 것은?

- ① $\int_0^1 g(x) dx$
 ② $\int_0^1 xg(x) dx$
 ③ $\int_0^1 f(x) dx$
 ④ $\int_0^1 xf(x) dx$
 ⑤ $\int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx$

3. 함수 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 에 대하여

$$F(x) = \int_0^x t f(x-t) dt \quad (x \geq 0)$$

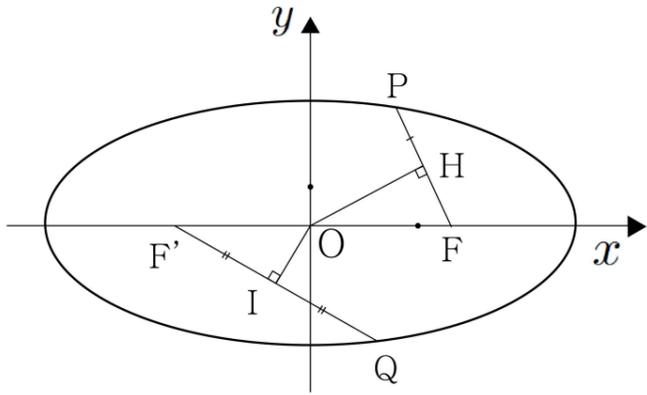
일 때, $F'(a) = \ln 10$ 을 만족시키는 상수 a 의 값을 구하시오.

4. 함수 $f(x) = x \sin x$ 에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

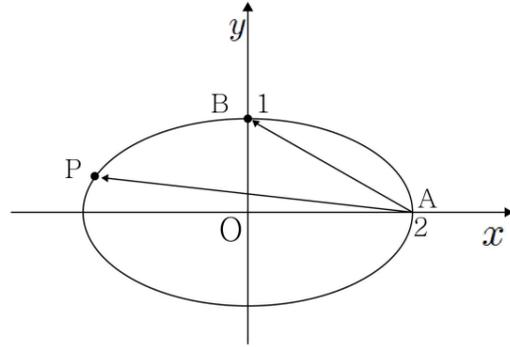
- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값을 갖는다.
- ㄴ. 직선 $y=x$ 는 곡선 $y=f(x)$ 에 접한다.
- ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 갖는 a 가 구간 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi)$ 에 존재한다.

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄱ, ㄷ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

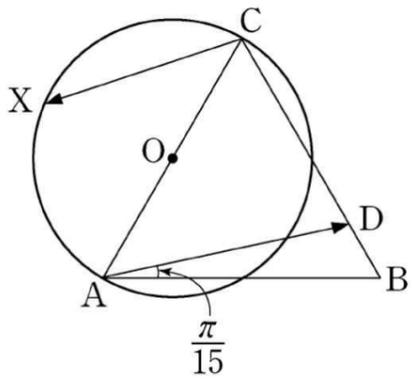
5. 두 점 $F(5,0)$, $F'(-5,0)$ 을 초점으로 하는 타원 위의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여 원점 O 에서 선분 PF 와 선분 QF' 에 내린 수선의 발을 각각 H 와 I 라 하자. 점 H 와 점 I 가 각각 선분 PF 와 선분 QF' 의 중점이고 $\overline{OH} \times \overline{OI} = 10$ 일 때, 이 타원의 장축의 길이를 l 이라 하자. l^2 의 값을 구하시오. (단, $\overline{OH} \neq \overline{OI}$)



6. 두 점 $A(2,0)$, $B(0,1)$ 와 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 가 최대가 되는 점 P 에서의 접선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.



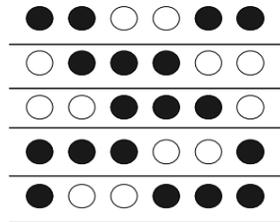
7. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$ 가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CX}$ 의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$ 의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



8. 검은 바둑돌 ● 과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타낼 수 있는 유형은 다음과 같이 4가지이다.

	●●	●○	○●	○○
	< A형 >	< B형 >	< C형 >	< D형 >

예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형> 1번, <C형> 1번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래와 같이 5이다.



10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.)

9. A, B 두 사람이 하루에 한 번씩 탁구 경기를 하기로 하였다. 첫 경기부터 A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같도록 유지되면서 경기가 진행될 때, 처음 7일 동안 경기를 치른 결과, A가 네 번 이기고 B가 세 번 이기는 경우의 수를 구하시오.

10. 10보다 큰 자연수 n 에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 두 부분집합 X 와 Y 를 택할 때, $n(X \cap Y) = 1$ 인 경우의 수는?
(단, $n(A)$ 는 집합 A 의 원소의 개수)

① $\sum_{k=1}^n {}_n C_k 2^{n-k}$

② $\sum_{k=1}^n {}_n C_k 2^{n-k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n n \cdot {}_n C_k 2^{n-k}$

④ $\sum_{k=1}^n k \cdot {}_n C_k 2^{n-k-1}$

⑤ $\sum_{k=1}^n k \cdot {}_n C_k 2^{n-k}$

추가 과제

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{\sqrt{x}} e^t dt$ 의 값을 구하여라.

3. 정적분을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} \sqrt{n^2 - k^2}$ 의 값을 구하여라.

2. 정적분 $\int_0^{\ln 2} x^2 e^x dx$ 의 값을 구하면?

- ① $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$
- ② $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2$
- ③ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$
- ④ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2$
- ⑤ $(\ln 2)^2 - 4\ln 2 - 2$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 의 값을 구하여라.

추가 과제

5. 함수 $f(x) = 3^x$ 일 때, 정적분

$$\int_0^1 \{f(x) + f(2-x)\} dx$$

의 값을 구하여라.

7. 함수 $f(x) = \sin x + \sin 2x \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)의 최댓값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ 2

6. 정적분 $\int_{-2}^2 \frac{1}{e^x + 1} dx$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

8. 함수 $f(x) = e^{-2x^2}$ 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

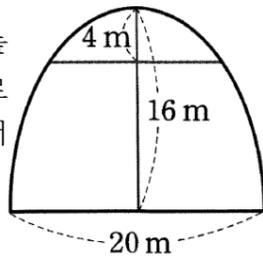
- ㄱ. $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.
ㄴ. 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.
ㄷ. $y = f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 3개다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

추가 과제

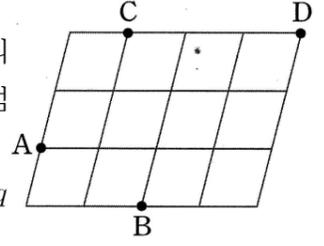
9. 타원 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 의 두 초점을 F, F' 이라 할 때, 타원 위의 점 P 에 대하여 $\overline{FP}^2 + \overline{F'P}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

10. 오른쪽 그림과 같이 폭이 20m이고 높이가 16m인 동굴의 단면은 지면을 단축으로 하는 타원의 일부와 같다고 한다. 천장에서 4m 떨어진 곳의 폭은 몇 m인가?



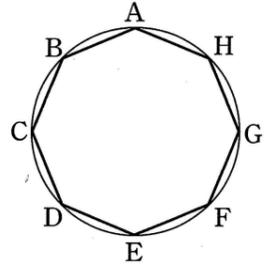
- ① $5\sqrt{2}$
- ② 10
- ③ $5\sqrt{5}$
- ④ $5\sqrt{7}$
- ⑤ 15

11. 오른쪽 그림과 같이 일정한 간격의 평행선으로 이루어진 도형 위에 네 점 A, B, C, D 가 있다. $\overrightarrow{AD} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ 일 때, 실수 p, q 에 대하여 $p - q$ 의 값은?



- ① $-\frac{1}{5}$
- ② $-\frac{2}{5}$
- ③ $-\frac{3}{5}$
- ④ $-\frac{4}{5}$
- ⑤ -1

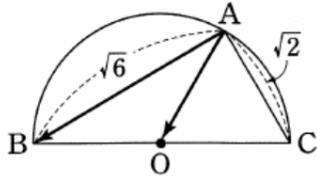
12. 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 정팔각형에서 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}| = 8$ 일 때, 정팔각형의 넓이는?



- ① 16
- ② $16\sqrt{2}$
- ③ 32
- ④ $32\sqrt{2}$
- ⑤ 48

추가 과제

13. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB} = \sqrt{6}$, $\overline{AC} = \sqrt{2}$ 인 삼각형 ABC 가 선분 BC 를 지름으로 하는 반원 O 에 내접할 때, $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB}$ 를 구하여라.

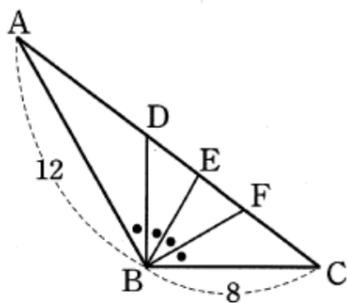


15. 두 집합

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 $a \in A$, $b \in A$ 이고 $a < b$ 이면 $f(a) \leq f(b)$ 를 만족시키는 함수 $f : A \rightarrow B$ 중에서 $f(1)f(4) = 12$ 를 만족시키는 함수의 개수는?

- ① 60 ② 65 ③ 70
 ④ 75 ⑤ 80

14. 아래 그림과 같이 $\angle B = 120^\circ$ 이고 $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 8$ 인 삼각형 ABC 에서 $\angle B$ 의 사등분선이 \overline{AC} 와 만나는 점을 차례대로 D, E, F 라 할 때, 보기에서 그 값이 가장 큰 것과 작은 것을 차례대로 적은 것은?



■ 보 기 ■

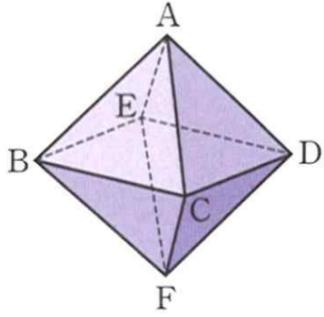
- | | |
|--|--|
| ㉠. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ | ㉡. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE}$ |
| ㉢. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$ | ㉣. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$ |

- ① ㉠, ㉢ ② ㉡, ㉠ ③ ㉡, ㉢
 ④ ㉢, ㉣ ⑤ ㉣, ㉠

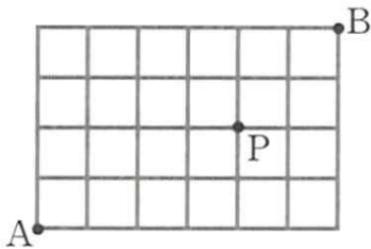
16. 다항식 $(a+b+c)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

추가 과제

17. 아래 그림과 같은 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 움직여 꼭짓점 F에 도착하는 방법의 수를 구하여라. (단, 한 번 지나간 꼭짓점은 다시 지나지 않는다.)



18. 아래 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



19. 원소가 6개인 집합을 4개 이상의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구하여라.

20. 승객 6명이 타고 있는 버스가 세 정류장 A, B, C에 정차한다. 3개의 정류장 A, B, C 중에서 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구하여라. (단, 새로 타는 승객은 없다.)

추가 과제

21. 1이 아닌 양수 a, b 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

| 보 기 |

ㄱ. $a > b > 1$ 이면	$\log_a b < \log_b a$
ㄴ. $a > b > 1$ 이면	$a^b < b^a$
ㄷ. $2^a = 3^b$ 이면	$a > b$
ㄹ. $\log_2 a = \log_3 b$ 이면	$a > b$

- ① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

22. $1 < x < 4$ 일 때,

$$A = \log_2 x^2, \quad B = (\log_2 x)^2, \quad C = \log_2 (\log_2 x)$$

의 대소 관계는?

- ① $A > B > C$ ② $B > A > C$
 ③ $B > C > A$ ④ $C > A > B$
 ⑤ $C > B > A$

23. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \\ & + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

24. $0 < x < \frac{\pi}{4}, 0 < y < \frac{\pi}{4}$ 일 때, 두 식

$$A = x \sin y + y \sin x, \quad B = x \cos x + y \cos y$$

의 대소를 비교하여라. (단, $x \neq y$)

추가 과제

25. 함수 $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ 의 극댓값은? (단, $x > 0$)

- ① 0 ② $\sqrt{2}-1$ ③ $\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}-2$ ⑤ $2\sqrt{2}$

26. 함수 $f(x) = x(\ln x)^2$ 의 극댓값과 극솟값의 합은?

- ① $\frac{2}{e^2}$ ② $\frac{4}{e^2}$ ③ $\frac{1}{e}$
④ 1 ⑤ e

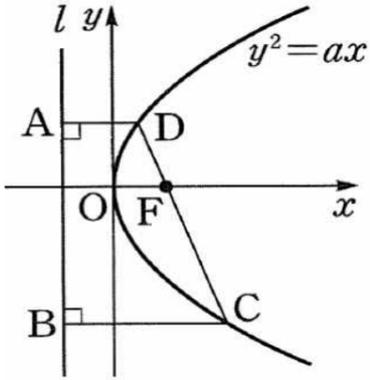
27. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 + 3\sin x + x$ 의 그래프가 변곡점을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-6 < a < -3$ ② $-6 \leq a \leq -3$ ③ $-3 < a < 3$
④ $-3 \leq a \leq 3$ ⑤ $3 < a < 6$

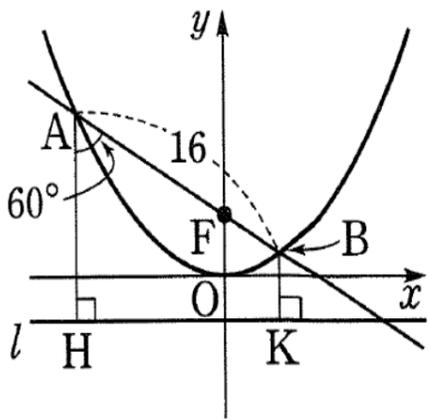
28. 함수 $f(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$ 의 변곡점의 개수를 구하여라.
(단, a, b, c 는 실수이다.)

추가 과제

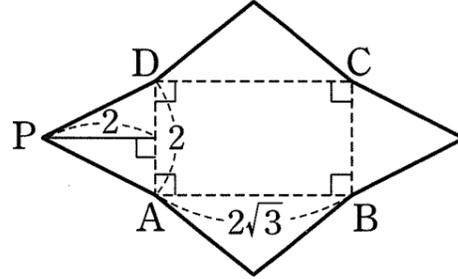
29. 아래쪽 그림의 포물선 $y^2 = ax$ 에서 점 F는 초점이고 직선 l 은 준선이다. 사다리꼴 ABCD의 넓이가 $192\sqrt{2}$ 이고 $\overline{DF} : \overline{CF} = 1 : 2$ 일 때, 선분 CD의 길이를 구하여라. (단, $a > 0$)



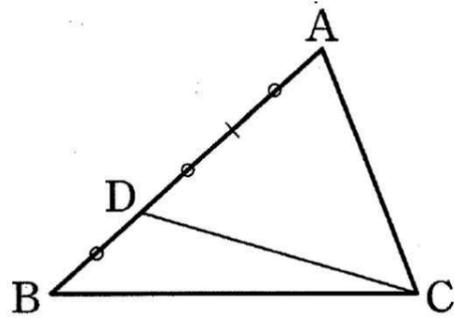
30. 아래쪽 그림과 같이 포물선의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 각각 H, K라 하자. $\overline{AB} = 16$, $\angle FAH = 60^\circ$ 일 때, \overline{BK} 의 길이를 구하여라.



31. 아래쪽 그림과 같은 전개도를 접어서 사각뿔을 만들려고 한다. $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AD} = 2$ 이고 삼각형 PAD의 높이가 2일 때, 이 사각뿔에서 옆면 PAB와 밑면 ABCD가 이루는 각의 크기를 구하여라.



32. 아래쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 변 AB를 삼등분하는 점 중에서 점 B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 CD를 접는 선으로 하여 꼭짓점 A의 평면 BCD 위로의 정사영이 선분 BC를 삼등분하는 점 중 꼭짓점 C와 가까운 점이 되도록 접을 때, $\triangle ADC$ 와 $\triangle BCD$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자. 이때 $\cos\theta$ 의 값을 구하여라.



추가 과제

33. 평면 $2x+y-z=1$ 위의 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 정삼각형 ABC의 평면 $x-2y-z=2$ 위로의 정사영의 넓이를 구하여라.

34. 두 구 $x^2+y^2+(z-1)^2=4$, $x^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$ 이 만날 때 생기는 원을 포함하는 평면을 α 라 하자. 평면 α 와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

35. 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열할 때, C와 D가 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는?

- ① 60 ② 80 ③ 120
④ 200 ⑤ 300

36. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라.

- | |
|---|
| (가) $f(3)$ 의 값은 홀수이다.
(나) $x < 3$ 이면 $f(x) > f(3)$ 이다.
(다) $x > 3$ 이면 $f(x) < f(3)$ 이다. |
|---|

추가 과제

37. $\left(x + \frac{1}{x^n}\right)^{10}$ 의 전개식에서 상수항이 존재하도록 하는 자연수 n 의 최댓값을 구하여라.

39. 빨간 공 3개와 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 집어넣는 것을 1회 시행이라 하자. 빨간 공이 나오면 1점, 노란 공이 나오면 2점을 얻을 때, 5회의 시행에서 7점을 얻을 확률은?

- ① ${}_5C_1\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^4$ ② ${}_5C_2\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)^3$ ③ ${}_5C_3\left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{7}\right)^2$
 ④ ${}_5C_4\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)$ ⑤ ${}_5C_5\left(\frac{4}{7}\right)^5$

38. $(1+x) + (1+x)^2 + \cdots + (1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x 의 계수는?

- ① 11 ② 22 ③ 33
 ④ 44 ⑤ 55

40. 3부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 8개의 공이 들어있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 소수가 적힌 공이면 동전을 3번, 짝수가 적힌 공이면 동전을 4번 던진다. 이때 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구하여라.